Tarea 10

Ejercicio 41
Sea R un anillo con 1, y $\phi\colon R \longrightarrow S$ un homomrfimso suprayectivo de anillos. Demuestra que S es un anillo *con* 1 y $\phi(1_R) = 1_S$.

Ejercicio 42
Sea $R = (R, +, \cdot)$ un anillo con 1. Recordemos que para cada $r \in R$ tenemos un homomrfismo de grupos abelianos $\phi_r\colon (\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (R, +), z \mapsto z \cdot r$. Demuestra que ϕ_{1_R} es un homomorfismo de anillos.

Ejercicio 43
Sea M un conjunto, y $\mathfrak{P}(M) = (\mathfrak{P}(M), +, \cdot)$ el anillo de ejercicio 39. Para un mapeo $\phi\colon M \longrightarrow M$ definimos el mapeo

$$\phi^*\colon \mathfrak{P}(M) \longrightarrow \mathfrak{P}(M), X \mapsto \{\phi(x) \mid x \in X\}$$

Demuestra que ϕ^* es un homomorfismo de anillos si y solamente si ϕ es inyectivo.

Ejercicio 44
Sean I, J ideales de un anillo R. Definimos $I + J = \{i + j \mid i \in I, j \in J\}$ y $IJ = \{x \in R \mid x = \sum_{a=1}^{n} i_a j_a, i_a \in I, j_a \in J, n \in \mathbb{N}\}$. Demuestra que IJ, $I \cap J$ y $I + J$ son ideales de R y que valen las inclusiones $IJ \subseteq (I \cap J) \subseteq I + J$.

Ejercicio 45
Sea R un anillo conmutativo tal que $\{0\}$ y R sean los únicos ideales de R. Entonces R es un campo, ó el númer de elementos de R es un primo y $r \cdot s = 0$ vale para todo $r, s \in R$.

Ejercicio 46
Sea $M_2(K)$ el anillo de matrices 2×2 sobre un campo K.

(a) Demuestra que el conjunto $\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) \mid a, b \in K\}$ forman un subanillo conmutativo R de $M_2(K)$.

(b) Determina los divisores de cero y las unidades de R.

(c) Encuentra en el anillo de polinomios $R[X]$ elementos de grado ≥ 1 que son unidades.

Miercoles 12 de marzo 2003, antes de la clase