Tarea 11

Ejercicio 47
Sea R un anillo conmutativo con 1. Un elemento $x \in R$ se llama *nilpotente* si existe $n \in \mathbb{N}$ con $x^n = 0$. Denominamos con $\mathrm{Nil}(R)$ el subconjunto de R de los elementos nilpotentes. $U(R) := \{u \in R \mid \exists r \in R : \quad rx = 1_R\}$, recordemos que $(U(R), \cdot)$ es el grupo de *unidades* de R. Demuestra:

(a) $(\mathrm{Nil}(R), +)$ es un subgrupo de $(R, +)$.

(b) Para $u \in U(R)$ y $x \in \mathrm{Nil}(R)$ tenemos $u + x \in U(R)$.

(c) Sea $f = \sum_{i=1}^{n} r_i X^i \in R[X]$, entonces $f \in \mathrm{Nil}(R[X])$ si y solamente $r_i \in \mathrm{Nil}(R)$ para todo i.

Ejercicio 48
Sea K un campo. Demuestra que en el anillo de polinomios $K[X]$ existe un número infinito de polinomios irreducibles y no asociados uno a uno.
Pista: K puede ser finito. Imita el argumento de Euclides para la existenica de una infinidad de primos en $\mathbb{Z}$.

Ejercicio 49
Sea R el anillo (conmutativo con 1) de las funciones holomorfas en el plano complejo $\mathbb{C}$. Demuestra:

(a) El grupo de unidades $U(R)$ consiste de las funciones que no tienen cero, admás $\mathbb{C}^* 1_R$ esta estrictamente contenido en $U(R)$.

(b) Los elementos irreducibles de R son las funciones holomorfas que tienen precisamente un cero (contando multiplicidades). Estos elementos son además primos.

(c) En R existen cadenas infinitas de divisores, i.e. sucesiones $(r_i)_{i \in \mathbb{N}}$ en R con $r_{i+1} \mid r_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$ tal que r_{i+1} no esta asociado a r_i (i.e. no existe unidad $u \in U(R)$ con $ur_{i+1} = r_i$). Pista: Considera funciones con una infinidad de ceros.

Ejercicio 50

Sea $n \in \mathbb{Z} \setminus \{1, 4, 9, 16, \ldots\}$, i.e. n no un cuadrado en $\mathbb{Z}$. Definimos

$$Q_n := \{a + b\sqrt{n} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \text{ y } R_n := \{a + b\sqrt{n} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Para $x = a + b\sqrt{n} \in Q_n$ definimos la *norma* $N(x) := a^2 - nb^2$. Demuestra:

(a) R_n y Q_n son subanillos de los complejos. Ademas R_n es un dominio entero, y Q_n es su campo de fracciones.

(b) $x \in R_n$ es unidad si y solamente si $N(x) \in \{-1, +1\}$. Determina $U(R_n)$ para $n < 0$. Pista: $N(xy) = N(x)N(y)$.

(c) En R_{-5} tenemos $6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5}) \cdot (1 - \sqrt{-5})$. Los elementos $2, 3, 1 + \sqrt{-5}, 1 - \sqrt{-5} \in R_{-5}$ son irreducibles y no asociados uno a uno.

(d) En R_{-5} todo elemento es producto de irreducibles, pero R_{-5} no es un anillo factorial.

Fecha de entrega: **Miercoles 19 de marzo 2003**, antes de la clase