Tarea 6

Ejercicio 25
Llamamos un grupo inésecendible, si no es producto directo de dos subgrupos propios.

(a) Determina hasta isomorfía todos los grupos abelianos finitos que son inéscendibles.

(b) Demuestra que los grupos $(\mathbb{Z}, +)$ y $(\mathbb{Q}, +)$ son inéscendibles.

(c) Demuestra que $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ no es inéscendible. Pista: Para un primo p considera el subgrupo $U_p < \mathbb{Q}$ que consiste de todas las fraciones cuyo denominador es un potencia de p, y $U_p/\mathbb{Z} < \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Ejercicio 26
Considera los siguientes dos premutaciones en $\mathfrak{S}_{10}$:

$$\tau_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 10 & 7 & 8 & 4 & 5 & 1 & 6 & 9 & 2 \end{smallmatrix}\right) \text{ y } \tau_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 7 & 6 & 10 & 8 & 1 & 9 & 4 & 2 \end{smallmatrix}\right)$$

(a) Descomponga τ_i en ciclos disjuntos, determina $\operatorname{sign}(\tau_i)$ y $\operatorname{ord}(\tau_i)$ para $i = 1, 2$. Calcula $\tau_2\tau_1\tau_2^{-1}$

(b) Determina el número de elementos en la clase de conjugación de τ_i en $\mathfrak{S}_{10}$ para $i = 1, 2$.

(c) Si p es un primo, y $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ un elemto de orden p entonces σ es un p-ciclo.

Ejercicio 27
Denotamos con $\mathfrak{A}_n$ el subgrupo alternante del grupo simetrico $\mathfrak{S})n$. Demuestra:

(a) Si $H \leq \mathfrak{S}_n$ es un subgrupo, entonces vale $H \leq \mathfrak{A}_n$ ó $[H : (H \cap \mathfrak{A}_n)] = 2$.

(b) Sea $K = \{\sigma\tau\sigma^{-1} \mid \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$ una clase de conjugación tal que $K \subset \mathfrak{A}_n$. Entonces K es una clase de conjugación en $\mathfrak{A}_n$, ó es la union de dos clases de conjugación en $\mathfrak{A}_n$.

(c) De un ejemplo para cada una de las dos situaciones en (b).

Fecha de entrega: **Lunes 27 de enero 2003**, antes de la clase