Tarea 7

Ejercicio 28
Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de números primos. Consideramos el grupo $P := \prod_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, el producto directo de los grupos abelianos $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +)$ y $S := \coprod_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, i.e. los elementos del producto que tienen solamente un numero finito de entradas diferentes a 0.

(a) El grupo S es el subgrupo de torsión de P (ver ejercicio 21).

(b) Para cada $s \in S$ existe un primo $p \in \mathbb{Z}$ tal que la ecuación $p \cdot x = s$ no tiene solución en P.

(c) Para cada primo $p \in \mathbb{Z}$ tenemos $p \cdot P/S = P/S$.

Ejercicio 29
Sea G un grupo abeliano finito y $G_2 := \{g \in G \mid g = -g\}$. Demuestra las siguientes afirmaciones:

(a) G_2 es un subgrupo de G isomorfo a $(\mathbb{Z}/(2\mathbb{Z}))^r$ para algún $r \in \mathbb{N}_0$.

(b) $\sum_{g\in G} g = \sum_{h\in G_2} h$ y $2\sum_{g\in G} g = 0$.

(c) $\sum_{g\in G} g \neq 0$ si y solamente si $G_2 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Ejercicio 30
Escribe la permutacion

$$\left(\begin{smallmatrix}1,2,3,4,5,6\\6,5,4,3,2,1\end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{S}_6$$

como producto de transposiciones de la forma $(i, i+1)$ con $1 \leq i \leq 5$. Pista: Este producto tendra por lo menos 15 factores.

Ejercicio 31

(a) El grupo simétrico $\mathfrak{S}_n$ se genera por las permutaciones $(1,2)$ y $(1,2,\dots,n)$.

(b) Si n es un primo entonces $\mathfrak{S}_n$ se genera por $(1,i)$ y $(1,2,\dots,n)$ si i es un entero $1 < n \leq n$.

(c) $\mathfrak{S}_4$ no se genera por $(1,3)$ y $(1,2,3,4)$.

Ejercicio 32

(a) Determina la estructura y el número de los 2-Sylow subgrupos de $\mathfrak{S}_5$. ¿Cuántos 5-subgrupos de Sylow tiene $\mathfrak{S}_5$?

(b) Demuestra: Todos los subgrupos de orden 10 en $\mathfrak{S}_5$ están contenidos en el grupo alternante.

(c) Demuestra: $\mathfrak{S}_5$ no contiene subgrupos de orden 15 ó 30.

Fecha de entrega: **Miercoles 6 de febrero 2003**, antes de la clase