Semestre 2003/1 | Algebra Moderna I
Christof Geiss

Tarea 9

Ejercicio 37
Para $n \geq 5$ sea U un subgrupo de $\mathfrak{S}_n$ y N un subgrupo normal de U tal que U/N resulta abeliano. Demuestra: Si U contiene todos los 3-ciclos de $\mathfrak{S}_n$, entonces tambien N los contiene.
Pista: Sean $a, b, c, d, e \in \{1, 2, \dots, n\}$ diferentes uno a uno, entonces vale:

$$(a, b, c) = (a, b, d) \cdot (c, e, a) \cdot (d, b, a) \cdot (a, e, c)$$

Utiliza lo anterior para concluir que $\mathfrak{S}_n$ no es soluble para $n \geq 5$.

Ejercicio 38
Demuestra las siguientes afirmaciones:
Un grupo de orden 333 no es simple.
Existe un grupo abeliano de orden 333 que no es cíclico.
Existe un grupo no abeliano de orden 333 (un producto semi-directo).

Ejercicio 39
Sea M un conjunto y $\mathfrak{P}(M)$ su conjunto potencia (el conjunto de todos los subconjuntos de M). Definimos sobre $\mathfrak{P}(M)$ las operaciones

$$X + Y := (X \cup Y) \setminus (X \cap Y) \quad \text{y} \quad X \cdot Y := X \cap Y$$

Demuestra que $(\mathfrak{P}(M), +, \cdot)$ es un anillo conmutativo y con unidad.

Ejercicio 40
Sea R un anillo y $\mathbb{N}_0$ los enteros no-negativos. Ademas sea $S := R^{\mathbb{N}_0}$ el conjunto de todos los mapeos de $\mathbb{N}_0$ en R. Para $f, g \in S$ definimos los elementos $f + g$ y $f \cdot g$ de S como sigue:

$$(f + g)(i) = f(i) + g(i) \qquad \text{para todo } i \in \mathbb{N}_0$$

$$(f \cdot g)(i) = \sum_{j=0}^{i} f(j)g(i - j) \text{ para todo } i \in \mathbb{N}_0$$

Demuestra que $(S, +, \cdot)$ es un anillo (S se llama el anillo de series de potencias formales sobre R).

Miercoles 26 de febrero 2003, antes de la clase