Tarea 8

Ejercicio 19
Sean s y t números algebraicos de tal forma que $s^3+3s+1=0$ y $t^3-6s+7=0$. Encuentra números racionales (de hecho enteros) $a_0(k), a_1(k), a_2(k)$ respectivamente $b_0(k), b_1(k), b_2(k)$ para $k=0,1,2,\dots,9$ tales que

$$s^k = a_0(k) + a_1(k)s + a_2(k)s^2 \text{ resp. } t^k = b_0(k) + b_1(k)t + b_2(k)t^2$$

para $k=0,1,\dots,9$. (En los dos casos hay que determinar $27 = 9\cdot 3$ enteros, pero para $k=0,1,2,3$ esto es muy fácil).

Ejercicio 20
Con las defenciones definiciones del ejercicio anterior sea $z := s+t$. Utiliza los resultados del ejercicio anterior para encontrar para $0 \leq i,j \leq 2$ y $k = 0,1,\dots,9$ numeros enteros $c_{i,j}(k)$ tales que

$$z^k = \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} c_{i,j}(k)s^i t^j \quad k=0,1,\dots,9$$

(Hay que determinar un total de $90 = (1+9)\cdot 3\cdot 3$ números.)

Ejercicio 21
Determina 10 números racionales $r_0, r_1, \dots, r_9$ (no todas iguales a 0) tales que con las definiciones del ejercicio anterior se tenga

$$r_0 + r_1 z + r_2 z + \cdots + r_9 z^9 = 0$$

Pista: $(r_0, r_1, \dots, r_9)$ es solución del siguiente sistema de nueve ecaciones lineales:

$$\sum_{k=0}^{9} c_{i,j}(k) r_k = 0 \qquad \text{para } 0 \leq i,j \leq 2$$

con los $c_{i,j}(k)$ que se determinaron en el ejercicio anterior (resolver este sistema tomará algo de tiempo).