Tarea 1

Ejercicio 1
Sea $M := \{f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}\}$ el conjunto de todas las funciones del intervalo $[-1,1]$ a los reales. Para $f, g \in M$ definimos $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ para todo $x \in [-1,1]$. Para $\lambda \in \mathbb{R}$ definimos $(\lambda \cdot f)(x) := \lambda f(x)$ para todo $x \in [-1,1]$. Demuestra:

(a) $(M, +, \cdot)$ es un espacio vectorial sobre los reales.

(b) Sea $C := \{f \in M \mid f \text{ es continuo }\}$, entonces $(C, +, \cdot)$ es un espacio vectorial sobre los reales.

Ejercicio 2
Consideramos el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ con la adición y multiplicación usual. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos son espacios vectoriales?

(a) $V := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 = x_4 \text{ y } x_1 - 2x_2 = 0\}$

(b) $W := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_1 - 1 = x_3\}$

Demuestra tus afirmaciones.

Ejercicio 3
Sea $R := \{(r_1, r_2) \mid r_1, r_2 \in \mathbb{R}\}$. Definimos

$$(r_1, r_2) + (s_1, s_2) := (r_1 + s_1, r_2 + s_2) \text{ para } (r_1, r_2), (s_1, s_2) \in R \text{ y}$$

$$\lambda \circ (r_1, r_2) := (\lambda r_1, \lambda^2 r_2) \text{ para } \lambda \in \mathbb{R} \text{ y } (r_1, r_2) \in R$$

¿Es $(R, +, \circ)$ un espacio vectorial sobre los reales? Justifica su afirmación.

Ejercicio 4
Sea $R := \{(r_1, r_2) \mid r_1, r_2 \in \mathbb{R}\}$. Definimos

$$(r_1, r_2) +' (s_1, s_2) := (r_1 + 2s_1, r_2 + 3s_2) \text{ para } (r_1, r_2), (s_1, s_2) \in R \text{ y}$$

$$\lambda \cdot (r_1, r_2) := (\lambda r_1, \lambda r_2) \text{ para } \lambda \in \mathbb{R} \text{ y } (r_1, r_2) \in R$$

¿Es $(R, +', \cdot)$ un espacio vectorial sobre los reales? Justifica su afirmación.