Semestre 2006/1

Algebra Lineal I
Titular: Christof Geiss
Ayudante: Francisco Barrios

Tarea 5

Ejercicio 1
Sea $c = a + bi \in \mathbb{C}$ un número complejo, con $a, b \in \mathbb{R}$. Consideramos el mapeo $\mu_c \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto c \cdot z$, con $\cdot$ la multiplicación usual en $\mathbb{C}$. Demuestra, que si identificamos $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ de la forma usal, entonce μ_c es un mapeo lineal $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Determina una matriz $\mathbf{m}_c \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ tal que $\mathbf{m}_c \cdot x = \mu_c(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$.

Ejercicio 2
Por definición, un complejo de cadena es una sucesión de homomorfismos

$$0 \xrightarrow{f_{n+1}} V_n \xrightarrow{f_n} V_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \xrightarrow{f_2} V_1 \xrightarrow{f_1} V_0 \xrightarrow{f_0} 0$$

tal que $f_i \circ f_{i+1} = 0$, i.e $\mathrm{Im}(f_{i+1}) \subset \mathrm{Ker}(f_i)$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Demuestra que entonces

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim V_i = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (\dim \mathrm{Ker}(f_i) - \dim \mathrm{Im}(f_{i+1}))$$

Ejercicio 3
Consideramos el siguiente diagrama conmutativo de espacios vectoriales donde los dos renglones son “exactos”, i.e. tenemos $\mathrm{Ker}(f_i) = \mathrm{Im}(f_{i+1})$ y $\mathrm{Ker}(g_i) = \mathrm{Im}(g_{i+1})$ para $i = 1, 2, 3$.

$$\begin{tikzcd}
V_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "\phi_4", "\text{epi.}"'] & V_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "\phi_3", "\cong"'] & V_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\phi_2"] & V_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\phi_1", "\cong"'] & V_0 \arrow[d, "\phi_0", "\text{mono.}"'] \\
W_4 \arrow[r, "g_4"] & W_3 \arrow[r, "g_3"] & W_2 \arrow[r, "g_2"] & W_1 \arrow[r, "g_1"] & W_0
\end{tikzcd}$$

Ademas, supongamos que los morfimos “verticales” tengan las propiedades que indicamos, i.e. ϕ_4 es epimorfismo, ϕ_3 y ϕ_1 son isomorfismos y ϕ_0 es monomorfimo. Demuestra que bajo estas condiciones ϕ_2 es un isomorfismo.