Tarea 7

Ejercicio 1
Determina los elementos $\lambda \in \mathbb{R}$ para los cuales la matriz

$$\mathbf{a}_\lambda := \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

es invertible. Determina en estos casos $\mathbf{a}_\lambda^{-1}$.

Ejercicio 2
Sean (v_1, v_2, v_3, v_4) vectores linealmente independientes en un espacio vectorial real. Si

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} w_1 := & & & & v_2 & - & v_3 & + & 2v_4 \\ w_2 := & & v_1 & + & 2v_2 & - & v_3 & - & v_4 \\ w_3 := & - & v_1 & + & v_2 & + & v_3 & + & v_4 \end{array},$$

demuestra que (w_1, w_2, w_3) son vectores linealmente independientes.

Ejercicio 3
Sea $\mathrm{U}_2 := \{\mathbf{u} \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C}) \mid \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{u}}^t = \mathbf{e}\}$ donde

$$\bar{\mathbf{u}}^t := \begin{pmatrix} \bar{u}_{11} & \bar{u}_{21} \\ \bar{u}_{12} & \bar{u}_{22} \end{pmatrix} \text{ si } \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{e} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Demuestra:

(a) Si $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathrm{U}_2$ entonces $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}^{-1} \in U_2$ (esto significa que U_2 es un subgrupo de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$).

(b) Sea $\mathbf{u} \in \mathrm{U}_2$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Si $\mathbf{u} - \lambda\mathbf{e}$ *no* es invertible, entonces $|\lambda| = 1$.