Tarea 8

Ejercicio 1
Considera las bases $\mathcal{B} := ((1,2),(3,4))$ de $\mathbb{R}^2$ y $\mathcal{C} := ((1,2,3),(0,1,4),(0,0,2))$ de $\mathbb{R}^3$. Determina para

$$\mathbf{a} := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$

la matriz del mapeo $\mathbf{a}\cdot$ con respecto a $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$.

Ejercicio 2

(a) Sea $\mathbb{F}$ un campo. Para un espacio vectorial V sobre $\mathbb{F}$ definimos el espacio dual $V^* := \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V,\mathbb{F})$. Si $\varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W)$, definimos el mapeo dual

$$\varphi^*\colon W^* \to V^*, \rho \mapsto \rho \circ \varphi.$$

Demuestra que φ^* es lineal.

(b) Si $\mathcal{B} := (v_1, v_2, \dots, v_m)$ es una base de V definimos una sucesion de elementos $\mathcal{B}^\vee := (v_1^\vee, \dots v_m^\vee)$ in V^* por la siguiente propiedad:

$$v_i^\vee(v_j) := \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{otros casos.} \end{cases}$$

Demuestra que $\mathcal{B}^\vee$ es una base de V^*, “la base dual a $\mathcal{B}$”.

(c) Sea $\mathcal{C} := (w_1, w_2, \dots w_n)$ una base de W y para $\varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W)$ sea $\mathbf{a} \in \operatorname{Mat}(n \times m, \mathbb{F})$ la matriz de φ con respecto a $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$. Demuestra que $\mathbf{a}^t$ es la matriz de φ^* con respeto a $\mathcal{C}^\vee$ y $\mathcal{B}^\vee$.

Pista: Se tiene $\varphi(v_i) = \sum_{j=1}^n a_{j,i} w_j$ y hay que verificar esencialmente que $\varphi^*(w_j^\vee) = \sum_{i=1}^m a_{j,i} v_i^\vee$.

Ejercicio 3
Calcula para

$$\mathbf{a} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det(\mathbf{a})$ y $\mathbf{a}^{-1}$ *usando transformaciones de renglones elementales.*