Semestre 2006/1

Algebra Lineal I
Titular: Christof Geiss
Ayudante: Francisco Barrios

Tarea 9

Ejercicio 1
Calcula el determinante de la siguiente matriz de tamaño $n \times n$:

$$\begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}.$$

Pista: Usa expansion por la primera columna para una induccion.

Ejercicio 2
Sea $\mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{Z})$ el conjunto de las matrices $n \times n$ con coefficientes en los números enteros. Demuestra, que para $\mathbf{u} \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{Z})$ existe $\mathbf{v} \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{Z})$ tal que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{e}$, si y solamente si $\det(\mathbf{u}) \in \{+1, -1\}$.

Ejercicio 3
Para una matriz $\mathbf{u} \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{F})$, cualquier matriz que se obtiene de $\mathbf{u}$ al "borrar" algunas columnas y renglones se llama *submatriz* de $\mathbf{u}$. Demuestra: Si $\mathbf{v} \in \mathrm{Mat}(m \times m, \mathbb{F})$ es una submatriz de $\mathbf{u}$ con $\det(\mathbf{v}) \neq 0$, entonces $m \leq \mathrm{rk}(\mathbf{u})$. Conversamente, si $\mathrm{rk}(\mathbf{u}) = m$ entonces existe una submatriz $\mathbf{v} \in \mathrm{Mat}(m \times m, \mathbb{F})$ de $\mathbf{u}$ con $\det(\mathbf{v}) \neq 0$.