ÁLGEBRA SUPERIOR II
EL PRINCIPIO DE INDUCCIÓN Y ALGUNAS DE SUS EQUIVALENCIAS

TITULAR: DR. CHRISTOF GEISS.
AYUDANTE: FRANCISCO BARRIOS

Abstract. En la primera parte de la presente nota demostramos algunas equivalencias del Principio de Inducción (PI): El Principio de Inducción Modificado (PIM) y el Principio del Buen Orden (PBO). Posteriormente hablamos de relaciones y probamos la fórmula para la cardinalidad del conjunto potencia $\mathcal{P}(X)$, donde X es un conjunto *finito*.

1. El Principio de Inducción

Al definir los números naturales pedimos la existencia de una función *sucesor* $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que satisficiera ciertos axiomas. Entre ellos había uno que decía textualmente:

> "Si $M \subseteq \mathbb{N}$ es un subconjunto que contiene al cero y satisface $S(M) \subseteq M$ entonces $M = \mathbb{N}$".

Caracterizamos a dicho axioma como equivalente al Principio de Inducción Completa (o Principio de Inducción):

> "Si una propiedad P se aplica al cero *(base inductiva)* y si para todo n que posee la propiedad P su sucesor $S(n)$ también la posee *(paso inductivo)* entonces esta propiedad la poseen *todos* los naturales".

Ocasionalmente se hace necesario trabajar con una versión equivalente del Principio de Inducción que se conoce con el nombre de **Principio de Inducción Modificado** (PIM):

> Si M es un subconjunto de $\mathbb{N}$ que satisface:
> (i) $0 \in M$;
> (ii) Si $1, 2, \ldots, n \in M$ entonces $n + 1 \in M$;
> entonces $M = \mathbb{N}$.

Como anteriormente se mencionó la mayoría de los autores prefieren iniciar la inducción en 1.

Otra propiedad que satisfacen los números naturales es la de que cualquier subconjunto *no vacío* posee un primer elemento. Dicha propiedad se recoge en el llamado **Principio del Buen Orden** (PBO):

> Si A es un subconjunto no vacío de los números naturales entonces A tiene un elemento que es *menor* que todos los demás elementos de A.

Podemos pasar a nuestro resultado principal:

Date: March 7, 2005.

Teorema 1. *El Principio de Inducción* $\iff$ *PIM* $\iff$ *PBO.*

Demostración:
(**PI**) $\Rightarrow$ (**PIM**): Estamos suponiendo (PI) y las hipótesis del (PIM), es decir, tenemos $M \subseteq \mathbb{N}$ tal que $0 \in M$ y siempre que $1, 2, \ldots, n \in M$ se tiene que $n + 1 \in M$. Como las hipótesis del axioma (3) de la función sucesor aplicadas a dicho subconjunto M se satisfacen podemos concluir que $M = \mathbb{N}$.

Pregunta: ¿Por qué es correcta esta demostración aunque *no* se utiliza explícitamente el Principio de Inducción?

(**PIM**) $\Rightarrow$ (**PI**): Sea P una propiedad aplicable a los números naturales y supóngase que el cero la satisface y que cada vez que $n \in \mathbb{N}$ cumple P, $n + 1$ también lo hace. Queremos probar que *todos* los naturales verifican P. Para ello suponemos (PIM) y definimos el subconjunto M como sigue:

$$M := \{\, x \in \mathbb{N} \mid x \text{ cumple } P \,\}$$

Por hipótesis vemos que se satisface (i) así como (ii). Por el (PIM) tenemos que $M = \mathbb{N}$ o lo que es lo mismo *todos* los naturales satisfacen P.

(**PI**) $\Rightarrow$ (**PBO**): Sea $A \subseteq \mathbb{N}$ un subconjunto no vacío y supongamos que A no posee ningún elemento menor que todos los demás. Defínase el siguiente conjunto:

$$B := \{\, n \in \mathbb{N} \mid n < a, \text{ para todo } a \in A \,\}$$

Afirmación: $A \cap B = \emptyset$. De lo contrario habría un elemento $a \in A \cap B$ tal que $a < a$. En consecuencia $B \subseteq \mathbb{N} - A$.

Por otro lado vemos que se cumple lo siguiente:

(1) $0 \in B$. De lo contrario el menor de *todos* los naturales estaría en A y por lo tanto A tendría un primer elemento.
(2) Si $n \in B$ entonces $n + 1 \in B$. En caso de $n + 1 \notin B$, tendríamos que $n + 1 \geq a_0$ para alguna $a_0 \in A$. Como $n < a_0 \Longrightarrow n + 1 \leq a_0$, combinando ambas desigualdades obtenemos $n + 1 = a_0 \in A$. De esta manera $n + 1$ sería un elemento menor que todos los demás de A.

En consecuencia por el (PI) $B = \mathbb{N}$. Esto combinado con la *afirmación* implica que $A = \emptyset$. ¿De dónde provino la contradicción? De suponer que A no poseía un elemento mínimo.

(**PBO**) $\Rightarrow$ (**PI**): Sea $M \subseteq \mathbb{N}$ que satisface $0 \in M$ y que cada vez que $n \in M$ entonces $n + 1 \in M$. Suponiendo el (PBO) probaremos que $M = \mathbb{N}$. Sea $M' := \mathbb{N} - M$. Si M' es no vacío entonces tiene un elemento mínimo m' y dado que $m' - 1 < m'$ tenemos que $m' - 1 \notin M'$ lo cual equivale a decir que $m' - 1 \in M$; pero por hipótesis tenemos que $(m' - 1) + 1 = m' \in M$. Esto es una contradicción y así concluye nuestra prueba. $\square$

2. Relaciones

Definición. Sean A y B conjuntos. Una *relación* entre A y B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$.

Ejemplos:

- Sea A arbitrario y $B = \emptyset$. En este caso se tiene que $A \times B = \emptyset$ y por lo tanto la única relación posible entre A y B es la vacía.
- Si A y B son arbitarios siempre se tienen por lo menos dos relaciones (no necesariamente distintas): La vacía y la total.
- Si $A := \{\, a, b \,\}$ y $B := \{\, 1, 2 \,\}$ existen dieciséis relaciones entre A y B.

La última afirmación es un buen pretexto para demostrar el siguiente:

Teorema 2. *Si X es un conjunto* finito *de cardinalidad $|X| = n$, entonces el* conjunto potencia $\mathcal{P}(X)$ *tiene cardinalidad $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$.*

Demostración:
La prueba es por inducción. La base inductiva (si estamos considerando $0 \in \mathbb{N}$) está dada al suponer $|X| = 0$. Pero esto se cumple si y sólo si $X = \emptyset$. En este caso $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ y por lo tanto $|\mathcal{P}(\emptyset)| = 2^0 = 1$.

Si preferimos iniciar la inducción en 1 entonces $X = \{*\}$, es decir X es un *singulete* y en este caso tenemos $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, X\}$ de donde se sigue que $|\mathcal{P}(X)| = 2^1 = 2$.

Ahora suponemos válido el teorema para $n = k > 0$ (ó 1 según sea el caso) y designamos por X a un conjunto de cardinalidad $k + 1$. Sea $a \in X$ un elemento arbitrario. Es claro que $|X - \{a\}| = k$ y utilizando la hipótesis de inducción tendríamos que $|\mathcal{P}(X - \{a\})| = 2^k$. Sin embargo ¿cómo relacionamos $\mathcal{P}(X - \{a\})$ y $\mathcal{P}(X)$? Muy fácil: Dado cualquier subconjunto $N \in \mathcal{P}(X)$ obtengo un subconjunto de $X - \{a\}$ si pasó una y sólo una de dos cosas:

(a) N permaneció inalterado en $X - \{a\}$; i.e. a no era un elemento de N.
(b) N proviene de cierto conjunto $N' = N \cup \{a\}$; i.e. a era un elemento de N

Conforme hacemos variar a los subconjuntos de X de acuerdo con las opciones anteriores *obtenemos* a todos los subconjuntos de $X - \{a\}$. En consecuencia tenemos $|\mathcal{P}(X)| = 2 \cdot |\mathcal{P}(X - \{a\})| = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$. Esto concluye la inducción $\square$