Tarea 4

Ejercicio 1
Sea $f : A \to B$ una función y $C \subseteq B$ un subconjunto cualquiera. Definimos la *imagen inversa* o *preimagen* de C bajo f como el conjunto:

$$f^{-1}(C) := \{a \in A \mid f(a) \in C\}$$

(el símbolo f^{-1} puede resultar confuso ya que *no* estamos diciendo en ningún caso que f sea biyectiva).
Utilice esta definición para demostrar las siguientes relaciones ($f : A \to B$ es una función cualquiera y $X \subseteq A$ así como $Y, Z \subseteq B$ son subconjuntos):

(i) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$.

(ii) $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$.

(iii) $f(X - Y) \supset f(X) - f(Y)$.

(iv) $f^{-1}(Y \cup Z) = f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(Z)$.

(v) $f^{-1}(Y \cap Z) = f^{-1}(Y) \cap f(Z)$.

(vi) $f(Y - Z) = f(Y) - f(Z)$.

[En los incisos *(ii)* y *(iii)* dé ejemplos para mostrar que las contenciones pueden ser propias].

Ejercicio 2
Sea $(G, \cdot)$ un grupo. Para un elemento $g \in G$ definimos $g^0 = e$. Si n es un entero no-negativo, definimos inductivamente $g^{n+1} = g^n \cdot g$. Con esto queda definido g^m para todo $m \in \mathbb{N}_0$. Si m es un enetero negativo, definimos ahora $g^m := (g^{-m})^{-1}$. Demuestra:

(a) Para todo $m, n \in \mathbb{Z}$ tenemos $g^n \cdot g^m = g^{n+m}$.

(b) El conjunto $\langle g \rangle := \{g^m \mid m \in \mathbb{Z}\}$ es un subgrupo de G, el *subgrupo generado por g*.

(c) Si G es abeliano y $n \in \mathbb{Z}$ entonces $(g \cdot h)^n = g^n \cdot h^n$ para todo $g, h \in G$.

Interpreta los incisos (a) y (c) para un grupo abeliano $(A, +)$.

Ejercicio 3
Sea G un grupo, y $M \subset G$ un subconjunto no vacio. Definimos

$$N_G(M) := \{g \in G \mid g^{-1}Mg = M\} \text{ donde } g^{-1}Mg := \{g^{-1}mg \mid m \in M\}$$

Demuestra que $N_G(M)$ es un subgrupo de G (el *normalisador* de M en G).

Ejercicio 4
Sea M un conjunto y $\mathcal{P}(M)$ su conjunto potenica. Sobre $\mathcal{P}(M)$ untroducimos la relacion binaria $+$ con

$$X + Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y) \text{ para todo } X, Y \in \mathcal{P}(M)$$

Sabemos del ejercicio 4 de la tarea 3 que $(\mathcal{P}(M), +)$ es un grupo abeliano. Consideramos ahora el subconjunto de $\mathcal{P}(M)$

$$\mathcal{F} := \{X \in \mathcal{P}(M) \mid X \text{ finito y } |X| \text{ es par }\}$$

Demuestra:

(a) $X + Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$

(b) $\mathcal{F}$ es un subgrupo de $\mathcal{P}(M)$.

Si M es finito, determina el indece de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{P}(M)$ y las clases laterales de $\mathcal{P}(M)$ modulo $\mathcal{F}$.

Ejercicio 5
Determina la tabla de multiplicación del grupo simetrico $S(\{1, 2, 3\}$. Es decir del conjunto de las los mapeos biyecctivos de $\{1, 2, 3\}$ en si mismo y con la composicion de funciones como multiplicacion. Es un grupo no abeliano con 6 elementos.