Semestre 2005/2

Algebra Superior II
Titular: Christof Geiss
Ayudante: Francisco Barrios

Tarea 5

Ejercicio 1
Sea G un grupo, U un subgrupo de G, y M, N subgrupos normales de G. Demuestra las siguientes afirmaciones:

(a) $U \cdot N = \{u \cdot n \mid u \in U, m \in M\}$ es un subgrupo de G y $U \cap N$ es un subgrupo normal de U.

(b) $M \cdot N$ son subgrupos normales de G.

(c) Si $M \cap N = \{e\}$ entonces $m \cdot n = n \cdot m$ para todo $m \in M$ y $n \in N$. Pista: Considera $n^{-1}] \cdot m^{-1} \cdot n \cdot m$.

Ejercicio 2
Se dice que dos subgrupos U y V de un grupo G estn *conjugados* si existe $g \in G$ con $V = g^{-1} \cdot U \cdot g$. Demuestra:

(a) La relación de ser conjugado es una relación de equivalencia sobre el conjunto de subgrupos de G.

(b) Si G es finito, entonces $|N_G(U) : U|$ es el número de subgrupos de G que están conjugados con U. Aquí $N_G(U) = \{g \in G \mid g^{-1} \cdot U \cdot g = U\}$ es el *normalizador* de U en G.

Ejercicio 3
Sea I un conjunto y $(A_i)_{i \in I}$ una familia de grupos abelianos que escribimos aditivamente. Definimos

$$\bigoplus_{i \in I} A_i := \{(a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i \mid \text{ existe } J \subset I \text{ finito, tal que } a_i = 0 \text{ si } i \in I \setminus J\}$$

y para cada $j \in I$ el mapeo $\iota_j \colon A_j \to \oplus_{i \in I} A_i$ con

$$\iota_j(a) = ((\iota_j(a))_i)_{i \in I} \text{ donde } (\iota_j(a))_i = \begin{cases} a & \text{si } i = j \\ 0 \in A_i & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Demuestra:

(a) $\bigoplus_{i\in I} A_i$ es un grupo abeliano y ι_j es un homomorfismo de grupos para todo $j \in I$.

(b) si $\phi_i \colon A_i \to B$ es una familia de homomorfismos de grupos abelianos, entonces existe un único homomorfismo de grupos $\oplus_{i\in I}\phi_i \colon \oplus_{i\in I} A_i \to B$ tal que $(\oplus_{i\in I}\phi_i)\circ\iota_j = \phi_j$ para todo $j \in I$. (Si B se escribe aditivamente entonces $\oplus_{i\in I}\phi_i((a_j)_{j\in I}) = \sum_{j\in I}\phi_j(a_j)$).

Ejercicio 4
Sea $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ los números racionales sin el 0. $\mathbb{Q}^*$ forman un grupo multiplicativo abeliano con la multiplicación usual. Si definimos para $i \in \mathbb{N}_0$ lo siguiente: $A_0 = (\mathbb{Z}/2\cdot\mathbb{Z}, +)$ y $A_i = (\mathbb{Z}, +)$ si $i \geq 1$ entonces $A := \oplus_{i\in\mathbb{N}_0} A_i$ es isomorfo a $\mathbb{Q}^*$. Pasos a seguir para ver eso:

- Sea $p_1, p_2, p_3, \ldots$ una enumeración de los primos (positivos) en $\mathbb{Z}$, por ejemplo, $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, p_5 = 11$ etc. y definimos para j=1,2,3,... un mapeo $\phi_j \colon A_j \to \mathbb{Q}^*, z \mapsto p_j^z$. Además definimos $\phi_0 \colon A_0, z + 2\mathbb{Z} \mapsto (-1)^z$. Demuestra que los ϕ_i son homomorfismos de grupos.

- Escribe en este caso explcitamente el homomorfismo $\phi := \oplus_{i\in\mathbb{N}_0}\phi_i$ definido en el ejercicio anterior (cuidado: $B = \mathbb{Q}^*$ se escribe *multiplicativamente*).

- ϕ es suprayectivo: Escribe $r \in \mathbb{Q}^*$ como $r = (-1)^s \cdot \frac{a}{b}$ con $s \in \{0, 1\}$ y a, b enteros con $\mathrm{mcd}\{a, b\} = 1$. Factoriza a y b en primos. Ahora encuentra una imagen inversa de r.

- Para ver que ϕ es inyectivo verifica $\mathrm{Ker}(\phi) := \{a \in A \mid \phi(a) = 1\} = \{0\}$. Usa que cada entero se factoriza de forma única en primos.