Semestre 2005/2

Algebra Superior II
Titular: Christof Geiss
Ayudante: Francisco Barrios

Tarea 8

Ejercicio 1
Sea K un campo conmutativo. Decimos que un polinomio en $K[X]$ es *normado* si es de la forma $X^n + \sum_{j=0}^{n-1} k_j X^j$ es decir si su coeficiente principal es igual a 1. Demuestra las siguientes afirmaciones:

(a) El número de polinomios (normados) en $K[X]$ que son primos, es infinito.

(b) Sea $K = \mathbb{Z}/(p\mathbb{Z})$ para un primo $p \in \mathbb{Z}$, y $f \in K[X]$ un elemento primo de grado n. Demuestra que $K[X]/(fK[X])$ es un campo con p^n elementos.

Ejercicio 2
Sean K y L campos con $K \subset L$. Demuestra:

(a) $1_K = 1_L$,

(b) $K[X] \subset L[X]$,

(c) Sean $f, g \in K[X]$ y sea h un máximo común divisor de f y g en $K[X]$. Demuestra que h tambien en $L[X]$ es un máximo común divisor de f y g.

Ejercicio 3
Recordamos: Un funcion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es *continua* en $x \in \mathbb{R}$ si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|f(y) - f(x)| < \epsilon$ para todo $y \in \mathbb{R}$ con $|x - y| < \delta$. Ademas, f es *continua* si es continaua para en todo $x \in \mathbb{R}$.
El conjunto $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ de todas las funciones $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un anillo con la composición y multiplicación por componentes (i.e. $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ y $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$). Demuestra:

(a) El conjunto $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ de funciones continuas $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un subanillo con uno de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$. Demuestra que $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ si $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) Tenemos la inclusión canónica $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathcal{C}(\mathbb{R}), r \mapsto \bar{r}$ donde $\bar{r} \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ es tal que $\bar{r}(x) = r$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Utiliza el Ejercicio 4 de la tarea anterior para encontrar un homorfismo $\phi_{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}}\colon \mathbb{R}[X] \to \mathcal{C}(\mathbb{R})$ que es inyectivo. En particular $\phi_{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}}(p)$ es una función continua para todo $p \in \mathbb{R}[X]$.

Ejercicio 4

Sea $f + \mathcal{N} \in \mathcal{R}/\mathcal{N} = \mathbb{R}$. entonces existe una única sucesión de enteros $b_1, b_2, b_3, \ldots$ con las siguientes propiedades:

(1) $b_1 \in \mathbb{Z}$ y $b_i \in \{0,1\}$ para $i = 2, 3, 4, \ldots$,

(2) para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un $j > n$ con $b_j = 0$,

(3) con $r_i := \sum_{j=0}^{i} b_i 2^{-i}$ para $i = 0, 1, 2, \ldots$ tenemos $r + \mathcal{N} = f + \mathcal{N} \in \mathbb{R}$.

Pista: En $\mathbb{R}$ definimos $x < f$ si y solamente existe un $\epsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $f_i - x_i > \epsilon$ para todo $i \geq n$. Con esto $\mathbb{R}$ es un campo ordenado, y podemos considerar el conjunto $M_f := \{x + \mathcal{N} \in \mathbb{R} \mid x \leq f + \mathcal{N}\}$. Define los r_i recursivamente de tal forma que $\bar{r}_i + cN \in M_f$ para todo $i \in \mathbb{N}$, donde $\bar{r}_i$ es la sucesión constante $r_i, r_i, r_i, \ldots$.