

Tarea 3**Ejercicio 9**

Sea V un espacio vectorial sobre los reales y $a, b, c, d \in V$. Además consideramos

$$\begin{aligned} v_1 &:= a + b + c + d \\ v_2 &:= 2a + 2b + c - d \\ v_3 &:= a + b + 3c - d \\ v_4 &:= a - b + c - d \\ v_5 &:= -b + c - d \end{aligned}$$

Demuestra que los vectores $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ no son linealmente independientes.

Ejercicio 10

Sea V un espacio vectorial sobre los complejos \mathbb{C} . Podemos considerar V también como espacio vectorial sobre los reales al restringir la multiplicación $\mathbb{C} \times V \rightarrow V$ a $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$. Como en las dos situaciones los conceptos de dimensión y envolvente lineal son diferentes, introducimos las notaciones $\dim_{\mathbb{R}}$, $\dim_{\mathbb{C}}$ y $L_{\mathbb{R}}$, $L_{\mathbb{C}}$ para ello. Determina en el caso $V = \mathbb{C}^3$ todas las parejas (r, c) de naturales tales que existen $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{C}^3$ tales que $r = \dim_{\mathbb{R}} L_{\mathbb{R}}(v_1, v_2, v_3)$ y $c = \dim_{\mathbb{C}} L_{\mathbb{C}}(v_1, v_2, v_3)$.

Ejercicio 11

Sea V un espacio vectorial sobre un campo \mathbb{F} y U_1, U_2 subespacios de V . Se dice que U_1 y U_2 son subespacios complementarios si $U_1 + U_2 = V$ y $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

Demuestra que si V es un espacio vectorial de dimensión n y U_1 un subespacio de dimensión p de V , entonces existe un subespacio U_2 de V complementario a U_1 y que cada subespacio U_2 con esta propiedad tiene dimensión $n - p$.

Ejercicio 12

Sean V y W espacios vectoriales sobre un campo \mathbb{F} . Demuestra que el conjunto $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ de todos los mapeos lineales de V a W forma un espacio vectorial con las operaciones definidas por

$$(f + g)(v) := f(v) + g(v) \text{ y } (\lambda \cdot f)(v) := \lambda f(v)$$

(para todo $f, g \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$, $v \in V$ y $\lambda \in \mathbb{F}$), forma un espacio vectorial.

Fecha de entrega: Jueves 11 de septiembre antes de la clase.