

Tarea 4**Ejercicio 13**

Sea p un primo y \mathbb{F} el campo $\mathbb{Z}/(p\mathbb{Z})$ con p elementos. Demuestra que \mathbb{F}^5 tiene precisamente

$$p^6 + p^5 + 2p^4 + 2p^3 + 2p^2 + p + 1$$

subespacios de dimensión 3.

Ejercicio 14

Sea V un espacio vectorial sobre un campo \mathbb{F} , y $U \subset V$ un subconjunto. Consideramos las siguientes condiciones a U .

- (i) $U \neq \emptyset$
- (i') $0 \in U$
- (ii) $u_1, u_2 \in U \Rightarrow u_1 + u_2 \in U$
- (iii) $\lambda \in \mathbb{F}$ y $u \in U \rightarrow \lambda u \in U$.

Demuestra: Para U los siguientes dos juegos de condiciones son equivalentes: $\{(i), (ii), (iii)\}$ y $\{(i'), (ii), (iii)\}$. Además demuestra que en este caso U es un espacio vectorial sobre \mathbb{F} .

Ejercicio 15

Considera los siguientes vectores en \mathbb{R}^4 : $w_1 := (1, 1, 1, 1)$, $w_2 := (0, -1, -1, 0)$, $w_3 := (1, -1, 0, 0)$, $w_4 := (0, 1, 0, 1)$, $w_5 := (1, 2, 3, 4)$, $w_6 := (\sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5})$ y determina $\dim L(w_1, \dots, w_i)$ para $i = 1, 2, \dots, 6$.

Ejercicio 16

Sea $f: V \rightarrow W$ un homomorfismo entre espacios vectoriales sobre un campo \mathbb{F} . Demuestra:

- (a) f es inyectivo si y solamente si $\text{Ker}(f) = \{0\}$.
- (b) Si (v_1, \dots, v_n) es una base de V entonces V es inyectivo si y solamente si $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ es linealmente independiente en W .

Fecha de entrega: Viernes 19 de agosto antes de la clase.