

Tarea 10**Ejercicio 30**

Considera las bases $\mathcal{B} := ((1, 2), (3, 4))$ de \mathbb{R}^2 y $\mathcal{C} := ((1, 2, 3), (0, 1, 4), (0, 0, 2))$ de \mathbb{R}^3 . Determina para

$$\mathbf{a} := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$

la matriz del mapeo $\mathbf{a} \cdot$ con respecto a \mathcal{B} y \mathcal{C} .

Ejercicio 31

- (a) Sea \mathbb{F} un campo. Para un espacio vectorial V sobre \mathbb{F} definimos el espacio dual $V^* := \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, \mathbb{F})$. Si $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$, definimos el mapeo dual

$$\varphi^*: W^* \rightarrow V^*, \rho \mapsto \rho \circ \varphi.$$

Demuestra que φ^* es lineal.

- (b) Si $\mathcal{B} := (v_1, v_2, \dots, v_m)$ es una base de V definimos una sucesión de elementos $\mathcal{B}^\vee := (v_1^\vee, \dots, v_m^\vee)$ en V^* por la siguiente propiedad:

$$v_i^\vee(v_j) := \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{otros casos.} \end{cases}$$

Demuestra que \mathcal{B}^\vee es una base de V^* , “la base dual a \mathcal{B} ”.

- (c) Sea $\mathcal{C} := (w_1, w_2, \dots, w_n)$ una base de W y para $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ sea $\mathbf{a} \in \text{Mat}(n \times m, \mathbb{F})$ la matriz de φ con respecto a \mathcal{B} y \mathcal{C} . Demuestra que \mathbf{a}^t es la matriz de φ^* con respecto a \mathcal{C}^\vee y \mathcal{B}^\vee .

Pista: Se tiene $\varphi(v_i) = \sum_{j=1}^n a_{j,i} w_j$ y hay que verificar esencialmente que $\varphi^*(w_j^\vee) = \sum_{i=1}^m a_{j,i} v_i^\vee$.

Ejercicio 32

Calcula para

$$\mathbf{a} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

 $\det(\mathbf{a})$ y \mathbf{a}^{-1} usando transformaciones de renglones elementales.**Fecha de entrega:** Viernes 14 de noviembre antes de la clase.