Semestre 2008/2 | Algebra Superior II
Christof Geiss

Tarea 6

Ejercicio 16

(a) Sea R un anillo con 1. Demuestra que el conjunto $M_2(R)$ de matrices 2×2 sobre R es un anillo con la adición y multiplicación de matrices usual.

(b) Consideramos $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ como conjunto. Sobre $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ definimos las relaciones binarias

$$(a,b)+(a',b') = (a+a', b+b') \quad \text{y} \quad (a,b)\cdot(a',b') := (aa'+2bb', ab'+ba').$$

Demuestra que así $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ es un anillo con $1_{\mathbb{Z}[\sqrt{2}]} = (1,0)$ y encuentra un elemento $(a,b) \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ con $(a,b)^2 = 2 := 1_{\mathbb{Z}[\sqrt{2}]} + 1_{\mathbb{Z}[\sqrt{2}]}$.

Ejercicio 17

Sea R un anillo tal que $x^2 := x \cdot x = x$ para todo $x \in R$. Demuestra que R es conmutativo. Encuentra un ejemplo.

Ejercicio 18

Sea $(A, +)$ un grupo abeliano, y

$$\operatorname{End}(A) := \{f \colon A \to A \mid f \text{ es un homomorfismo de grupos}\},$$

los *endomorfismos* de A. Definimos para $f, g \in \operatorname{End}(A)$ lo siguiente:

$$(f+g)(a) := f(a) + g(a) \quad \text{y} \quad (f \cdot g)(a) := f(g(a)) \quad \text{para todo } a \in A.$$

Entonces $f+g$ y $f \cdot g$ también son endomorfismos de A. Demuestra: $(\operatorname{End}(A), +, \cdot)$ es un anillo.

Ejercicio 19

Sea R un anillo, con $I, J \subset R$ ideales de R. Definimos

$$I \cdot J := \{\sum_{a=1}^{n} i_a j_a \mid n \in \mathbb{N} \text{ y } i_a \in I, j_a \in J \text{ para } a = 1, 2, \ldots n\}$$

además $I + J := \{i + j \mid i \in I, j \in J\}$. Demuestra que $I \cap J$, $I + J$ y $I \cdot J$ son ideales de R.

Fecha de entrega: Jueves 17 de abril antes de la clase.