Semestre 2008/2 Algebra Superior II
Christof Geiss

Tarea 8

Ejercicio 23
Los quaternios de Hamilton
Sea $\mathbb{H} := \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \mid a_i \in \mathbb{Q} \text{ para } i = 1, 2, 3, 4\}$. Definimos sobre $\mathbb{H}$ la adición por $(a_1, a_2, a_3, a_4) + (b_1, b_2, b_3, b_4) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, a_4 + b_4)$ y la multiplicación por $(a_1, a_2, a_3, a_4) \cdot (b_1, b_2, b_3, b_4) = (f_1, f_2, f_3, f_4)$, donde

$$\begin{aligned} f_1 &= a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4 \\ f_2 &= a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_4 - a_4b_3 \\ f_3 &= a_1b_3 - a_2b_4 + a_3b_1 + a_4b_2 \\ f_4 &= a_1b_4 + a_2b_3 - a_3b_2 + a_4b_1 \end{aligned}$$

Demuestra que $\mathbb{H}$ es un campo no conmutativo. Pista: verifica que

$$(a_1, a_2, a_3, a_4)^{-1} = \frac{1}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}(a_1, -a_2, -a_3, -a_4)$$

si $(a_1, a_2, a_3, a_4) \neq (0, 0, 0, 0)$. Verificar la asociatividad de la multiplicación es algo laborioso.

Ejercicio 24
Sumas directas
Sea I un conjunto y $(A_i)_{i\in I}$ una familia de grupos abelianos que escribimos aditivamente. Definimos

$$\bigoplus_{i\in I} A_i := \{(a_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i \mid \text{ existe } J \subset I \text{ finito, tal que } a_i = 0 \text{ si } i \in I \setminus J\}$$

y para cada $j \in I$ el mapeo $\iota_j \colon A_j \to \oplus_{i\in I} A_i$ con

$$\iota_j(a) = ((\iota_j(a))_i)_{i\in I} \text{ donde } (\iota_j(a))_i = \begin{cases} a & \text{si } i = j \\ 0 \in A_i & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Demuestra:

(a) $\bigoplus_{i \in I} A_i$ es un grupo abeliano y ι_j es un homomorfismo de grupos para todo $j \in I$.

(b) si $\phi_i \colon A_i \to B$ es una familia de homomorfismos de grupos abelianos, entonces existe un único homomorfismo de grupos $\oplus_{i \in I} \phi_i \colon \oplus_{i \in I} A_i \to B$ tal que $(\oplus_{i \in I} \phi_i) \circ \iota_j = \phi_j$ para todo $j \in I$. (Si B se escribe aditivamente entonces $\oplus_{i \in I} \phi_i((a_j)_{j \in I}) = \sum_{j \in I} \phi_j(a_j)$).

Ejercicio 25
El algoritmo de Euclídeos
Sea R un anillo euclidiano, con $a, b \in R$ y $a \neq 0$. Entonces para algún $n \in \mathbb{N}_0$ existen elementos $q_0, q_1, \ldots, q_n \in R$ y $r_1, r_2, \ldots, r_n \in R$ tal que

$$\begin{aligned}
b &= q_0 a + r_1, & d(r_1) &< d(a), \\
a &= q_1 r_1 + r_2, & d(r_2) &< d(r_1), \\
r_1 &= q_2 r_2 + r_3, & d(r_3) &< d(r_2), \\
&\vdots & &\vdots \\
r_{n-2} &= q_{n-1} r_{n-1} + r_n, & d(r_n) &< d(r_{n-1}), \\
r_{n-1} &= q_n r_n.
\end{aligned}$$

Demuestra que r_n es un máximo común divisor de a y b.

Ejercicio 26
Consideramos el anillo R del Ejercicio 21 (Tarea 7). Este anillo se llama también los *enteros Gaussianos*.

(a) ¿Es $2 := (2, 0)$ un primo en R?

(b) Determina en R un máximo común divisor de $(11, 7)$ y $(18, -1)$.
Pista: Ejercicio 25

(c) Demuestra que $3 := (3, 0)$ es un primo en R. ¿Cuántos elementos tiene $K := R/(3R)$?

(d) Produzca las tablas de adición y multiplicación para K.

Fecha de entrega: Jueves 8 de Mayo antes de la clase.