Semestre 2008/2 | Algebra Superior II
Christof Geiss

Tarea 9

Ejercicio 27
Sea K un campo conmutativo. Decimos que un polinomio en $K[X]$ es *normado* si es de la forma $X^n + \sum_{j=0}^{n-1} k_j X^j$ es decir si su coeficiente principal es igual a 1. Demuestra las siguientes afirmaciones:

(a) El número de polinomios (normados) en $K[X]$ que son primos, es infinito.

(b) Sea $K = \mathbb{Z}/(p\mathbb{Z})$ para un primo $p \in \mathbb{Z}$, y $f \in K[X]$ un elemento primo de grado n. Demuestra que $K[X]/(fK[X])$ es un campo con p^n elementos.

Ejercicio 28
Sean K y L campos con $K \subset L$. Demuestra:

(a) $1_K = 1_L$,

(b) $K[X] \subset L[X]$,

(c) Sean $f, g \in K[X]$ y sea h un máximo común divisor de f y g en $K[X]$. Demuestra que h también en $L[X]$ es un máximo común divisor de f y g.

Ejercicio 29
Consideramos la inclusión de anillos $\mathbb{Z} \subset R, z \mapsto (z, 0)$ de los enteros en los enteros Gaussianos (ver Ejercicios 21 y 26). Sea $p \in \mathbb{Z}$ un primo. Demuestra: Si p no es un primo en R entonces existen enteros a y b tal que

$$p = (a, b) \cdot (a, -b) = (a^2 + b^2, 0)$$

con (a, b) y $(a, -b)$ primos en R.

Fecha de entrega: Miércoles 14 de Mayo antes de la clase.