Semestre 2009/2 Algebra Lineal II
Christof Geiss

Tarea 3

Ejercicio 7
Sean $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{F}$. Demuestra que el polinomio característico de

$$\begin{pmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -a_1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{F})$$

es $X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots a_1X + a_0$.

Ejercicio 8
Sea $\mathbf{a} \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{F})$ trigonalizable con valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$, y sea $\chi_{\mathbf{a}}(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ el polinomio característico de $\mathbf{a}$. Demuestra: Para $k = 1, 2, \dots, n-1$ se tiene

$$a_{n-k} = (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\cdots\lambda_{i_k}.$$

Pista: Demuestra que $\chi_{\mathbf{a}}(X) = (X - \lambda_1)\cdots(X - \lambda_n)$ y compara con la expresión de arriba.

Ejercicio 9
Para $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{F}^n$ se define la matriz circulante en $\mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{F})$ como sigue:

$$\mathrm{circ}(a_1, a_2, \dots, a_n) := \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_2 & \cdots & a_n & a_1 \end{pmatrix}.$$

Sea $\mathcal{C}_n \subset \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{F})$ el conjunto de las matrices circulantes. Claramente $\mathrm{circ}\colon \mathbb{F}^n \to \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{F})$ es un mapeo lineal y inyectivo. $\mathrm{circ}(1, 0, \dots, 0) = E_n$ y sea $\mathbf{m} := \mathrm{circ}(0, 1, 0, \dots, 0)$.

(a) Consideramos el homomorfismo de anillos

$$\epsilon_{\mathbf{m}} \colon \mathbb{F}[X] \to \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{F}), X \mapsto \mathbf{m}.$$

Demuestra que $\mathcal{C}_m$ es la imagen de $\epsilon_{\mathbf{m}}$. Concluya que por eso $\mathcal{C}_m$ es un subanillo de $\mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{F})$ que es isomorfo al anillo cociente $\mathbb{F}[X]/(X^n - 1)$.

(b) Demuestra que para todo $\mathbf{c} \in \mathcal{C}_n$ y todo $P \in \mathbb{F}[X]$ también $P(\mathbf{m}) \in \mathcal{C}_n$. Si $\mathbf{m} \in \mathcal{C}_n$ es invertible, también $\mathbf{m}^{-1} \in \mathcal{C}_n$.

(c) Si $X^n - 1 = (X - \omega_1) \cdots (X - \omega_n)$ para ciertos $\omega_i \in \mathbb{F}$ (diferentes uno a uno), entonces todos los elementos de $\mathcal{C}_n$ son (simultáneamente) diagonalizables. Pista: Demuestra primero que $\mathbf{m}$ es diagonalizable, después aplica (a).

Fecha de entrega: Viernes 6 de marzo antes de la clase.