Semestre 2009/2 | Algebra Lineal II
Christof Geiss

Tarea 4

Ejercicio 10
Sea $2 \leq m \in \mathbb{N}$ un numero natural. Consideramos el anillo cociente $\mathbb{Z}_m := \mathbb{Z}/(m\mathbb{Z})$. Recordamos que los elementos de $\mathbb{Z}_m$ son de la forma $\overline{k} := k + m\mathbb{Z}$ con $k \in \mathbb{Z}$ y $\overline{k} = \overline{l}$ si $k - l \in m\mathbb{Z}$. Por lo tanto $\mathbb{Z}_m$ tiene precisamente m elementos. Demuestra:

(a) $0 \neq \overline{k} \in \mathbb{Z}_m$ es un divisor de 0 si y solamente si $1 < \operatorname{mcd}(k, m) < m$.

(b) $\overline{k} \in \mathbb{Z}_m$ es una unidad si y solamente si $\operatorname{mcd}(k, m) = 1$

Ejercicio 11
Determina la tabla de multiplicación para el grupo de unidades de $\mathbb{Z}/(36\mathbb{Z})$

Ejercicio 12
Consideramos $R := \{m+ni\sqrt{5} \in \mathbb{C} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ donde $i \in \mathbb{C}$ cumple $i^2 = -1$.

(a) Verifica que R es un subanillo del campo de los números complejos $\mathbb{C}$. En particular, R es un dominio entero con 1.

(b) El mapeo $\mu\colon R \to \mathbb{N}_0, m+ni\sqrt{5} \mapsto m^2+5n^2$ es multiplicativo, i.e. $\mu(rs) = \mu(r)\mu(s)$ para todo $r, s \in R$.

(c) 1 y -1 son las únicas unidades de R. Pista: Demuestra $r \in R^*$ implica $\mu(r) = 1$.

(d) Los elementos de $I := \{3, 2+i\sqrt{5}, 2-i\sqrt{5}\} \subset R$ son irreducibles. Pista: Para $z \in I$ tenemos $\mu(z) = 9$, entonces si x es un divisor de z tenemos que $\mu(x)$ es un divisor de 9; pero $\mu(x) = 3$ es imposible.

(e) $3 \in R$ es irreducible pero no es primo. Pista: Verifica que 3 es un divisor de $9 = (2 + i\sqrt{5})(2 - i\sqrt{5})$ pero 3 no es un divisor de $2 \pm i\sqrt{5}$.

Fecha de entrega: Martes 17 de marzo antes de la clase.