Semestre 2009/2 Algebra Lineal II
Christof Geiss

Tarea 9

Ejercicio 24
Sea

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \\ 0 & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{F})$$

el bloque de Jordan de tamaño $n \times n$ para el valor propio λ. Convenimos que $J_1(\lambda) = \lambda \in \mathrm{Mat}(1 \times 1, \mathbb{F})$.

(a) Calcula $\mathrm{rk}(J_n(0))^k$ para $k = 1, 2, \ldots, n$.

(b) Sean $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_r \geq 1$ números naturales con $k_1+k_2+\cdots+k_r = n$ y $J_{k_1,k_2,\ldots,k_r} = \mathrm{diag}(J_{k_1}(0), J_{k_2}(0), \ldots, J_{k_r}(0)) \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{F})$. Calcula $\mathrm{rk}\, J^k_{k_1,k_2,\ldots,k_r}$ para $k = 1, \ldots, n$.

(c) Sea $\mathbf{m} \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{F})$ nilpotente, i.e. $\mathbf{m}^k = 0$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Demuestra que $\mathbf{m}$ es similar a algún $J_{k_1,\ldots,k_r}$, y entonces $\mathrm{rk}\, \mathbf{m}^k = \mathrm{rk}\, J^k_{k_1,\ldots,k_r}$ para todo $k = 1, \ldots, n$.

(d) Sea $\mathbf{m} \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{F})$ nilpotente, y $r_k := \mathrm{rk}\, \mathbf{m}^k$ para $k = 1, \ldots, n$. Explica como se obtienen los $k_1, k_2, \ldots, k_r$ en (c) de la sucesión $r_1, r_2, \ldots, r_n$.

Ejercicio 25
Consideramos para $\lambda \in \mathbb{F}$ el polinomio $f = (X - \lambda)^n \in \mathbb{F}[X]$. Demuestra que la matriz acompañante $\mathbf{b}_f$ de f es similar al bloque de Jordan $J_n(\lambda)$.

Ejercicio 26
Calcula para la matriz

$$\begin{pmatrix} 44 & 89 & 120 & -32 \\ 0 & -12 & -32 & -56 \\ -14 & -20 & -16 & 49 \\ 8 & 14 & 16 & -16 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(4 \times 4, \mathbb{C})$$

la forma normal de Frobenius y la forma normal de Jordan.

Fecha de entrega: Martes 12 de mayo antes de la clase.