Semestre 2009/2 | Algebra Lineal II
Christof Geiss

Tarea 12

Ejercicio 33
Sean V y W espacios de dimensión finita con producto interno. Denotamos con V^* resp. W^* los respectivos espacios duales, con $R^V: V^* \to V$ y $R^W: W^* \to W$ los respectivos isomorfismos (salvo conjugación) de Riesz *i.e.* tenemos por ejemplo $\langle v, R^V(\varphi)\rangle = \varphi(v)$ para todo $v \in V$ y $\varphi \in V^*$. Finalmente, para $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ denotamos con $f^\times: W^* \to V^*$ el mapeo dual definido por $f^\times(\omega) = \omega \circ f$. Demuestra que para el adjunto f^* tenemos $f^\times = (R^V)^{-1} \circ f^\times \circ R^W$.

Pista: $f^\times(\omega)(v) = \omega(f(v))$ para todo $\omega \in W^*$ y $v \in V$. Evalua el lado derecho de una forma similar.

Ejercicio 34
Sean V y W espacios de dimensión finita con producto interno y $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$. Para bases $\mathcal{V}$ de V y $\mathcal{W}$ de W denotamos con $\mathbf{m}_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(f)$ la matriz que representa a f con respeto a $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$. Demuestra que $\mathbf{m}_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(f^*) = (\mathbf{m}_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(f))^\dagger$ donde para $\mathbf{m} \in \mathrm{Mat}(n \times m, \mathbb{F})$ se tiene $\mathbf{m}^\dagger \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{F})$ con $\mathbf{m}^\dagger_{i,j} = \overline{\mathbf{m}}_{j,i}$. Concluya que el mapeo

$$?^*\colon \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(W, V), f \mapsto f^*$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales (salvo conjugación).

Fecha de entrega: Martes 9 de junio antes de la clase.