Semestre 2012/1

Algebra Lineal I
Christof Geiss

## Tarea 1

**Ejercicio 1**
Sea $M := \{f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}\}$ el conjunto de todas las funciones del intervalo $[-1,1]$ a los reales. Para $f, g \in M$ definimos $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ para todo $x \in [-1,1]$. Para $\lambda \in \mathbb{R}$ definimos $(\lambda \cdot f)(x) := \lambda f(x)$ para todo $x \in [-1,1]$. Demuestra:

(a) $(M, +, \cdot)$ es un espacio vectorial sobre los reales.

(b) Sea $C := \{f \in M \mid f \text{ es continuo }\}$, entonces $(C, +, \cdot)$ es un espacio vectorial sobre los reales.

**Ejercicio 2**
Consideramos el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ con la adición y multiplicación usual. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos son espacios vectoriales?

(a) $V := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 = x_4 \text{ y } x_1 - 2x_2 = 0\}$

(b) $W := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_1 - 1 = x_3\}$

Demuestra tus afirmaciones.

**Ejercicio 3**
Fijemos $0 < m \in \mathbb{N}$, entonces $m\mathbb{Z} := \{\ldots, -m, 0, m, 2m, \ldots\}$ denota los múltiplos de $m$. Consideramos la relación de equivalencia $\sim$ sobre $\mathbb{Z}$, dada por $a \sim b$ si y solamente si $a - b \in m\mathbb{Z}$. Notación: $a + m\mathbb{Z} := \{a + mk \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

(a) Demuestra: $a + m\mathbb{Z} = b + m\mathbb{Z}$ si y solamente si $a \sim b$

(b) Demuestra: las clases de equivalencia de $\sim$ sobre $\mathbb{Z}$ son precisamente $0 + m\mathbb{Z}, 1 + m\mathbb{Z}, \ldots, (m-1) + m\mathbb{Z}$. Denotamos el conjunto de estas clases de equivalencia con $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

(c) Demuestra: Las operaciones $(a + m\mathbb{Z}) + (b + m\mathbb{Z}) := (a + b) + m\mathbb{Z}$ y $(a + m\mathbb{Z}) \cdot (b + m\mathbb{Z}) := (ab) + m\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ están bien definidas.

(d) Calcula las tablas de adición y multiplicación de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ para $m = 5$ y $m = 6$.

(e) ¿Cuáles de los axiomas de un campo se cumplen en $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$?

(f) Demuestra que $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ es un campo si $p$ es un primo.

**Ejercicio 4**
Sea $V = (V, +, \cdot)$ un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$. Consideramos un subconjunto $U \subset V$ tal que

- $\lambda \cdot u \in U$ para todo $\lambda \in \mathbb{F}$ y todo $u \in U$
- $u + v \in U$ para todo $u, v \in U$.

Es decir, $U$ es un subespacio de $V$ en la terminología de la clase. Demuestra que $U$ equipado con la restricción de $+$ y $\cdot$ a $U$ cumple los ocho axiomas de un espacio vectorial. Pista: Recupera primero las observaciones de la clase: $0 = 0_V \in U$ y para todo $u \in U$ también $-u \in U$ (el inverso aditivo de $u$).

**Fecha de entrega:** Martes 23 de agosto antes de la clase.