Semestre 2012/1

Algebra Lineal I
Christof Geiss

Tarea 2

Ejercicio 5
Sea $p \in \mathbb{N}$ un primo, $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/(p\mathbb{Z})$ el campo con p elementos. Demuestra:

(a) Para $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $\mathbb{F}_p^n$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}_p$ que tiene p^n elementos.

(b) $\mathbb{F}_p^n$ tiene precisamente $1 + p + p^2 + \cdots p^{n-1}$ subespacios de dimensión 1. Pista: Intenta verificar la afirmación primero para $n = 1, 2, 3$. Para el caso general observa que $(1 + p + \cdots p^{n-1})(p-1) = p^n - 1$.

Ejercicio 6
Considera el subespacio

$$U := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ y } 2x_2 - x_4 = 0\}$$

de $\mathbb{R}^4$. Encuentra una base de U y completa esta base a una base de $\mathbb{R}^4$.

Ejercicio 7
Consideramos los siguientes elementos de $\mathbb{R}^4$: $v_1 := (1, 2, 3, 4)$, $v_2 := (2, 3, 4, 5)$, $v_3 := (4, 5, 6, 7)$, $v_4 := (5, 6, 7, 8)$. Encuentra una base de la envolvente lineal $L_{\mathbb{R}}(v_1, v_2, v_3, v_4)$.

Ejercicio 8
Consideramos los siguientes vectores en $\mathbb{R}^3$: $v_1 := (1, 2, 3)$, $v_2 := (2, 1, 3)$, $v_3 := (2, 3, 1)$ y los elementos de la base estándar $e_1 := (1, 0, 0)$, $e_2 := (0, 1, 0)$, $e_3 := (0, 0, 1)$.

(a) Demuestra que (v_1, v_2, v_3) es una base de $\mathbb{R}^3$.

(b) ¿Para cuáles $k \in \{1, 2, 3\}$ también (e_k, v_2, v_3) es una base de $\mathbb{R}^3$? (Según el lema de intercambio de base hay por lo menos un k con esta propiedad).

Fecha de entrega: Martes 30 de agosto antes de la clase.