Semestre 2012/1 Algebra Lineal I
Christof Geiss

Tarea 3

Ejercicio 9
Sea V un espacio vectorial sobre los reales y $a, b, c, d \in V$. Además consideramos

$$\begin{array}{lrcrcrcr} v_1 := & a & + & b & + & c & + & d \\ v_2 := & 2a & + & 2b & + & c & - & d \\ v_3 := & a & + & b & + & 3c & - & d \\ v_4 := & a & - & b & + & c & - & d \\ v_5 := & & & -b & + & c & - & d \end{array}$$

Demuestra que los vectores $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ no son linealmente independientes.

Ejercicio 10
Sea V un espacio vectorial sobre los complejos $\mathbb{C}$. Podemos considerar V también como espacio vectorial sobre los reales al restringir la multiplicación $\mathbb{C} \times V \to V$ a $\mathbb{R} \times V \to V$. Como en las dos situaciones los conceptos de dimensión y envolvente lineal son diferentes, introducimos las notaciones $\dim_{\mathbb{R}}$, $\dim_{\mathbb{C}}$ y $L_{\mathbb{R}}$, $L_{\mathbb{C}}$ para ello. Determina en el caso $V = \mathbb{C}^3$ todas las parejas (r, c) de naturales tales que existen $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{C}^3$ tales que $r = \dim_{\mathbb{R}} L_{\mathbb{R}}(v_1, v_2, v_3)$ y $c = \dim_{\mathbb{C}} L_{\mathbb{C}}(v_1, v_2, v_3)$.

Ejercicio 11
Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$ y U_1, U_2 subespacios de V. Se dice que U_1 y U_2 son subespacios complementarios si $U_1 + U_2 = V$ y $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

Demuestra que si V es un espacio vectorial de dimensión n y U_1 un subespacio de dimensión p de V, entonces existe un subespacio U_2 de V complementario a U_1 y que cada subespacio U_2 con esta propiedad tiene dimensión $n - p$.

Ejercicio 12
Sean V y W espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{F}$. Demuestra que el conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ de todos los mapeos lineales de V a W forma un espacio vectorial con las operaciones definidas por

$$(f + g)(v) := f(v) + g(v) \text{ y } (\lambda \cdot f)(v) := \lambda f(v)$$

(para todo $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$, $v \in V$ y $\lambda \in \mathbb{F}$), forma un espacio vectorial.

Fecha de entrega: Martes 6 de septiembre antes de la clase.