Semestre 2012/1 | Algebra Lineal I
Christof Geiss

Tarea 5

Ejercicio 16
Consideramos para un campo $\mathbb{F}$ el espacio $V = \mathbb{F}^5$ con su base natural $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5)$. Además consideramos para $i = 1, 2, 3, 4$ los subespacios V_i de V definidos por $V_i := L_{\mathbb{F}}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_i)$. Así tenemos una "bandera" de subespacios

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset V_3 \subset V_4 \subset V_5 = V,$$

donde $\dim_{\mathbb{F}} V_i = i$ para $i \in \{0, 1, \dots, 5\}$. Determina todos las sucesiones posibles

$$(\dim(U \cap V_0), \dim(U \cap V_1), \dim(U \cap V_2), \dim(U \cap V_3), \dim(U \cap V_4), \dim(U, V_5))$$

que puedan ocurrir si $U \subset V$ es un subespacio de dimensión 3.

Ejercicio 17
Sea $c = a + bi \in \mathbb{C}$ un número complejo, con $a, b \in \mathbb{R}$. Consideramos el mapeo $\mu_c \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto c \cdot z$, con $\cdot$ la multiplicación usual en $\mathbb{C}$. Demuestra, que si identificamos $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ de la forma usual, entonces μ_c es un mapeo lineal $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Determina una matriz $\mathbf{m}_c \in \operatorname{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ tal que $\mathbf{m}_c \cdot x = \mu_c(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$.

Ejercicio 18
Por definición, un complejo de cadena es una sucesión de homomorfismos

$$0 \xrightarrow{f_{n+1}} V_n \xrightarrow{f_n} V_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \xrightarrow{f_2} V_1 \xrightarrow{f_1} V_0 \xrightarrow{f_0} 0$$

tal que $f_i \circ f_{i+1} = 0$, i.e $\operatorname{Im}(f_{i+1}) \subset \operatorname{Ker}(f_i)$ para $i = 1, 2, \dots, n$. Demuestra que entonces

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim V_i = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (\dim \operatorname{Ker}(f_i) - \dim \operatorname{Im}(f_{i+1}))$$

Fecha de entrega: Martes 27 de septiembre antes de la clase.