Semestre 2012/1 | Algebra Lineal I
Christof Geiss

Tarea 10

Ejercicio 29
Calcula para

$$\mathbf{a} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det(\mathbf{a})$ y $\mathbf{a}^{-1}$ *usando transformaciones de renglones elementales.*

Ejercicio 30
Demuestra:

$$\det \begin{pmatrix} b_1 & a & \cdots & a \\ a & b_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & b_n \end{pmatrix} = \left(\prod_{i=1}^{n} (b_i - a) \right) \cdot \left(1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{a}{b_j - a} \right).$$

Ejercicio 31
Denotemos para $\mathbf{m} \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{F})$ con $\widetilde{\mathbf{m}}$ la matriz adjunta de $\mathbf{m}$, que definimos en el curso. Demuestra

(a) $\det(\widetilde{\mathbf{m}}) = (\det(\mathbf{m}))^{n-1}$

(b) $\widetilde{\widetilde{\mathbf{m}}} = (\det \mathbf{m})^{n-2}\mathbf{m}$

(c) $\{\widetilde{\mathbf{m}} \mid \mathbf{m} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{F})\} = \{\mathbf{n} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{F}) \mid \mathrm{rk}(\mathbf{n}) \neq 2\}$. Es decir, una matriz 3×3 es la matriz adjunta de otra exactamente cuando su rango no sea 2. Pista: Si $\mathrm{rk}(\mathbf{m}) \in \{1, 2\}$ entonces $\mathrm{rk}(\widetilde{\mathbf{m}}) = \mathrm{rk}(\mathbf{m}) - 1$ para matrices 3×3.

Ejercicio 32
Decida para los siguientes dos sistemas de ecuaciones lineales si tienen solución, y encuentra en su caso todas las soluciones (usando el método de Gauss):

(a)

$$\begin{array}{rrrrrcr} 1x_1 + & 3x_2 + & 4x_3 + & 5x_4 + & 12x_5 & = & 4 \\ 2x_1 + & 7x_2 + & 9x_3 + & 13x_4 + & 30x_5 & = & 10 \\ 6x_1 + & 21x_2 + & 27x_3 + & 40x_4 + & 93x_5 & = & 31 \\ 1x_1 + & 10x_2 + & 11x_3 + & 30x_4 + & 66x_5 & = & 22 \\ 3x_1 + & 11x_2 + & 14x_3 + & 30x_4 + & 75x_5 & = & 25 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rrrrrcr} 1x_1 + & 3x_2 + & 4x_3 + & 5x_4 + & 12x_5 & = & 6 \\ 2x_1 + & 7x_2 + & 9x_3 + & 13x_4 + & 30x_5 & = & 16 \\ 6x_1 + & 21x_2 + & 27x_3 + & 40x_4 + & 93x_5 & = & 50 \\ 1x_1 + & 10x_2 + & 11x_3 + & 30x_4 + & 66x_5 & = & 43 \\ 3x_1 + & 11x_2 + & 14x_3 + & 30x_4 + & 75x_5 & = & 49 \end{array}$$

Fecha de entrega: Jueves 3 de noviembre antes de la clase.