Semestre 2012/1 Algebra Lineal I
Christof Geiss

Tarea 11

Ejercicio 33
Calcula el determinante de la siguiente matriz de tamaño $n \times n$:

$$\begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}.$$

Pista: Usa expansión por la primera columna para una inducción.

Ejercicio 34
Sea $\mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{Z})$ el conjunto de las matrices $n \times n$ con coeficientes en los números enteros. Demuestra, que para $\mathbf{u} \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{Z})$ existe $\mathbf{v} \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{Z})$ tal que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{e}$, si y solamente si $\det(\mathbf{u}) \in \{+1, -1\}$.

Ejercicio 35
Para una matriz $\mathbf{u} \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{F})$, cualquier matriz que se obtiene de $\mathbf{u}$ al "borrar" algunas columnas y renglones se llama *submatriz* de $\mathbf{u}$. Demuestra: Si $\mathbf{v} \in \mathrm{Mat}(m \times m, \mathbb{F})$ es una submatriz de $\mathbf{u}$ con $\det(\mathbf{v}) \neq 0$, entonces $m \leq \mathrm{rk}(\mathbf{u})$. Conversamente, si $\mathrm{rk}(\mathbf{u}) = m$ entonces existe una submatriz $\mathbf{v} \in \mathrm{Mat}(m \times m, \mathbb{F})$ de $\mathbf{u}$ con $\det(\mathbf{v}) \neq 0$.

Ejercicio 36
Determina, calculando rangos, si el siguiente sistema de ecuaciones lineales tiene solución, y determina en su caso el conjunto de soluciones:

$$\begin{aligned} x_1 + \ 2x_2 + \ 3x_3 &= 1 \\ 4x_1 + \ 5x_2 + \ 6x_3 &= 2 \\ 7x_1 + \ 8x_2 + \ 9x_3 &= 3 \\ 5x_1 + \ 7x_2 + \ 9x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Fecha de entrega: Jueves 10 de noviembre antes de la clase.