Semestre 2012/1

Algebra Lineal I
Christof Geiss

Tarea 12

Ejercicio 37
Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ y considera

$$\mathbf{v} := \begin{pmatrix} \lambda_1^0 & \lambda_2^0 & \cdots & \lambda_n^0 \\ \lambda_1^1 & \lambda_2^1 & \cdots & \lambda_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{F})$$

Demuestra que $\det(\mathbf{v}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)$.

Ejercicio 38
Sean $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{F}$, y considera la matriz

$$\mathbf{c} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{F})$$

Demuestra que el polinomio característico de $\mathbf{c}$ es
$X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$.

Ejercicio 39
Supongamos que $X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$ con $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$. Demuestra que entonces la matriz $\mathbf{v}$ del ejercicio 37 diagonaliza la matriz $\mathbf{c}$ del ejercicio 38, es decir $\mathbf{v}^{-1} \cdot \mathbf{c} \cdot \mathbf{v}$ es una matriz diagonal (¿cuál?).

Fecha de entrega: Jueves 17 de noviembre, antes de la clase.