Semestre 2012/2

Algebra Moderna
Christof Geiss

Tarea 1

Ejercicio 1

Sea $G = (G, \cdot)$ un grupo. Para $g \in G$ sea $\varphi_g \in \mathrm{Aut}(G)$ el automorfismo interno con $\varphi_g(x) = gxg^{-1}$ para todo $x \in G$.

(a) Verifica que el mapeo $\alpha\colon G \to \mathrm{Aut}(G), g \mapsto \varphi_g$ es efectivamente un homomorfismo de grupos.

(b) Verifica que $\mathrm{Inn}(G) := \mathrm{Im}(\alpha)$ es un subgrupo *normal* de $\mathrm{Aut}(G)$.

Ejercicio 2

Sea G un grupo con dos subgrupos H y N, donde N es normal.
Demuestra que las siguientes afirmaciones son equivalentes

(a) $G = N \cdot H$ y $N \cap H = \{e\}$

(b) Cada elemento de G se puede escribir de forma única como un producto de un elemento de N y un elemento de H.

(c) Existe un homomorfismo de grupos $\pi\colon G \to H$ que es la identidad sobre H y $\mathrm{Ker}(\pi) = N$.

Demuestra, que en este caso tenemos un homomorfismo de grupos

$$\eta\colon H \to \mathrm{Aut}(N), h \mapsto (n \mapsto hnh^{-1})$$

y G es isomorfo al producto semidirecto $N \rtimes_\eta H$.

Ejercicio 3

Sea $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, +)$ el grupo de los números reales con la adición usual.

(a) Demuestra que el mapeo $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{R}), r \mapsto (x \mapsto e^r x)$ es un homomorfismo de grupos.

(b) Sea $(G, *) := \mathbb{R} \rtimes_\phi \mathbb{R}$, y $H := \{0\} \times \mathbb{R} < G$. Calcula las clases laterales izquierdos y derechos de $(a, 0) \in G$ con respecto a H para todo $a \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 4
Sea G un grupo, y H un subgrupo de G. Demuestra que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) $gH = Hg$ para todo $g \in G$.

(b) $gHg^{-1} \subset H$ para todo $g \in G$.

(c) $gHg^{-1} = H$ para todo $g \in G$.

A discutir en la Ayudantía del 16 de Febrero.