Semestre 2012/2 | Algebra Moderna
Christof Geiss

Tarea 5

Ejercicio 16
Sea G un grupo finito y $H < G$ un subgrupo. Demuestra:

(a) $N := \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$ es un subgrupo normal de G que esta contenido en H. Pista: Considera la acción de G sobre las clases laterales izquierdas G/H por traslación izquierda, y el homomorfismo de grupos $G \to \mathfrak{S}(G/H)$ correspondiente.

(b) Para N como en (a) se tiene: $M \lhd G$ y $M \leq H$ implica $M \subset N$.

(c) Sea p el divisor primo más pequeño de $|G|$. Si $[G : H] = p$ entonces H es normal en G. Pista: Demuestra que $[H : N]$ es un divisor de $(p-1)!$ para N como en (a).

(d) Para cada primo p, la intersección de todos las p-grupos de Sylow en G es normal en G. Cada p-subgrupo normal de G esta contenido en esta intersección.

Ejercicio 17

(a) Sean $p \neq q$ dos números primos. Demuestra que cada grupo G de orden p^2q tiene un grupo de Sylow que es normal en G.

(b) Cada grupo de orden 200 tiene un subgrupo normal abeliano que no es trivial.

Ejercicio 18
Demuestra:

(a) Si un grupo G de orden 12 tiene un subgrupo de orden 6, entonces G tiene precisamente un subgrupo de orden 3.

(b) Sea G un grupo y $N < G$ con $[G : N] = 2$. Si $H < G$ y $H \not\subset N$, entonces H tiene un subgrupo de índice 2.

(c) Cada grupo de orden 12 que no contiene un subgrupo de orden 6 es isomorfo a $\mathfrak{A}_4$. Pista: La acción de G por conjugación sobre el conjunto de 3-grupos de Sylow induce una inclusión de G en $\mathfrak{S}_4$.

(d) $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A}_4)$ es isomorfo a $\mathfrak{S}_4$. Pista: La acción de $\mathfrak{S}_4$ sobre $\mathfrak{A}_4$ por conjugación induce una inyección de $\mathfrak{S}_4$ en $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A}_4)$. Acota $|\mathrm{Aut}(\mathfrak{A}_4)|$ al contar los elementos de cada orden posible en $\mathfrak{A}_4$.

Ejercicio 19

(a) Determina la estructura y el número de los 2-grupos de Sylow en $\mathfrak{S}_5$. ¿Cuántos 5-subgrupos de Sylow tiene $\mathfrak{S}_5$?

(b) Demuestra que todos los subgrupos de orden 10 en de $\mathfrak{S}_5$ estan contenidos en $\mathfrak{A}_5$.

(c) Demuestra que $\mathfrak{S}_5$ no tiene subgrupos de orden 15.

(d) Demuestra que $\mathfrak{S}_5$ no tiene subgrupos de orden 30. Pista: Usando (c) demuestra que tal subgrupo H seria generado por un 3-ciclo y un 5-ciclo. Entonces H sería un subgrupo de $\mathfrak{A}_5 = \mathfrak{A}_5'$.

(e) Demuestra: El único subgrupo de $\mathfrak{S}_5$ de orden 60 es $\mathfrak{A}_5$.

A discutir en la Ayudantía del 15 de Marzo.