Semestre 2012/2 | Algebra Moderna
Christof Geiss

Tarea 6

Ejercicio 20
Sea $\mathcal{P} \subset \mathbb{N}$ el conjunto de los números primos, $P := \prod_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ el producto directo de los grupos abelianos finitos $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +)$, y $S := \oplus_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ el coproducto (suma directa) correspondiente en la categría de grupos abelianos. Demuestra:

(a) $S \subset P$ es un subgrupo que consiste precisamente de los elementos de orden finito en P. Todos los elementos de $P/S \setminus \{0\}$ son de orden infinito.

(b) Para todo $s \in P \setminus 0$ existe un primo p tal que la ecuación $p \cdot x = s$ no tenga solución en P.

(c) Para todo primo p se tiene $p \cdot P/S = P/S$.

(d) No existe ningun subgrupo $S' < P$ con $S' \oplus S = P$.

Ejercicio 21
Sea $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. Demuestra:

(a) Sean $a, b \in \{1, 2, \ldots, n\}$ dos elementos diferentes. El grupo alternante $\mathfrak{A}_n$ es generado por los 3-ciclos (a, b, k) con $k \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{a, b\}$. Pista: Es suficiente, expresar todo 3-ciclo como producto de los 3-ciclos mencionados. Distingue los casos (a, u, b), (a, u, v), (b, u, v) y (u, v, x) para $u, v, x \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{a, b\}$.

(b) Sea $N \lhd \mathfrak{A}_n$ un subgrupo normal. Si N contiene un 3-ciclo, entonces $N = \mathfrak{A}_n$. Pista: Sea (a, b, c) un 3-ciclo. Encuentra para todo $k \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{a, b\}$ una permutación $\sigma_k \in \mathfrak{A}_n$ tal que $(a, b, k) = \sigma_k (a, b, c) \sigma_k^{-1}$.

(c) Sea ahora $n \geq 5$ y $N \lhd \mathfrak{A}_n$. Si $N \neq \mathfrak{A}_n$ y $\sigma \in N \setminus \{\mathrm{Id}_n\}$ entonces $\mathrm{Mov}(\sigma) := |\{k = 1, 2, \ldots, n \mid \sigma(k) \neq k\}| \geq 5$.

(d) El grupo $\mathfrak{A}_n$ es simple si $n \geq 5$. Pista: Sea $N \lhd \mathfrak{A}_n$ un subgrupo normál no trivial. Considaremos un $\sigma \in N \setminus \{\mathrm{Id}_n\}$ tal que $\mathrm{Mov}(\sigma)$ sea minimal en $N \setminus \{\mathrm{Id}_n\}$. Escribimos σ como producto de ciclos ajenos, con los ciclos mas largos primero. Por (b) y (c) solo tenemos que distinguir los siguientes casos: $\sigma = (a, b, c, d, \ldots) \cdots$, $\sigma = (a, b, c)(d, e, \ldots) \cdots$ y $\sigma = (a, b)(c, d)(e, f) \cdots$. Estudia $\sigma' := \tau^{-1}\sigma^{-1}\tau\sigma \in N$ con $\tau = (b, c, d)$ para llegar a una contradicción.

Ejercicio 22
Consideramos los anillos cociente $\mathbb{Z}_m := \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ para $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

(a) Demuestra: $k + m\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}_m$ es una unidad si y solamente si $\mathrm{mcd}(k, m) = 1$.

(b) Demuestra que el grupo de unidades $\mathbb{Z}_m^*$ es isomorfo al grupo de automorfismos $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_m, +)$ del grupo aditivo.

(c) Demuestra que en caso $\mathrm{mcd}(m_1, m_2) = 1$ se tiene $\mathbb{Z}_{m_1 \cdot m_2}^* \cong \mathbb{Z}_{m_1}^* \times \mathbb{Z}_{m_2}^*$.

(d) Determina los factores invarientes de los grupos abelinos finitos $\mathbb{Z}_m^*$ en los siguientes casos: $m \in \{4, 8, 16, 3, 9, 27, 432\}$.

A discutir en la Ayudantía del 22 de Marzo.