Semestre 2012/2 | Algebra Moderna
Christof Geiss

Tarea 8

Ejercicio 26
Sea $n \in \mathbb{Z} \setminus \{z^2 \mid z \in \mathbb{N}_0\}$ y

$$Q_n := \{a + b\sqrt{n} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}, \quad R_n := \{a + b\sqrt{n} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Para $x = a+b\sqrt{n} \in Q_n$, la *norma* $N(x)$ de x es $N(x) := a^2 - nb^2$. Demuestra:

(a) R_n es subanillo de $\mathbb{C}$ y un dominio entero. Q_n es el campo de fracciones de R_n

(b) $x \in R_n$ es una unidad si y solamente si $N(x) \in \{1, -1\}$.

(c) $(R_n)^* = \{1, -1\}$ si $n < -1$. Trata de visualizar en el plano $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ las unidades de R_n para $n > 1$.

(d) Los elementos $2, 3, 1 \pm \sqrt{-5}$ de R_{-5} son irreducibles. Ninguno de estos cuatro elementos es asociado a otro de estos elementos.

(e) $6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5}) \cdot (1 - \sqrt{-5})$ y concluya que en R_{-5} hay elementos irreducibles que no son primos.

Ejercicio 27
Consideramos en $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = R_{-5}$ el ideal $\mathfrak{p} := (2, 1 + \sqrt{-5})$. Demuestra:

(a) $\mathfrak{p}$ no es un ideal principal. <u>Pista</u>: Recuerda que $2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ es irreducible.

(b) $\mathfrak{p}$ es un ideal primo, además es el único ideal primo que contiene a (2). <u>Pista</u>: Verifica que $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \cong \mathbb{Z}[X]/(X^2 + 5)$ y $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]/\mathfrak{p} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Ejercicio 28
Sea R un anillo conmutativo con 1.

(a) Un elemento $r \in R$ se llama nilpotente, si existe un $n \in \mathbb{N}$ con $r^n = 0$. Demuestra que el conjunto de los elementos nilpotentes de R forma un ideal. <u>Pista</u>: En R vale la formula binomial para $(a + b)^n$.

(b) Demuestra: Si $J \subset R$ es un ideal, entonces

$$\mathrm{nil}(J) := \{r \in R \mid r^n \in J \text{ para algun } n \in \mathbb{N}\}$$

es un ideal en R.

(c) Caracteriza los ideales I de $\mathbb{Z}$ que cumplan $I = \mathrm{nil}(I)$.

Ejercicio 29
Sea K un campo, y $\mathbf{m} := \left(\begin{smallmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, K)$. Demuestra:

(a) $R := \{\mathbf{x} \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, K) \mid \mathbf{xm} = \mathbf{mx}\}$ es un subanillo conmutativo de $\mathrm{Mat}(2 \times 2, K)$.

(b) Existe un $f \in K[X]$ con $R \cong K[X]/(f)$.

(c) R es un campo para $K = \mathbb{Q}$ y $K = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, pero no es un campo para $K = \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$.

A discutir en la Ayudantía del 12 de Abril.