Semestre 2012/2

Algebra Moderna
Christof Geiss

Tarea 11

Ejercicio 37

(Independencia lineal de caracteres). Sea K un campo, $K^* := K \setminus \{0\}$ el grupo multiplicativo de K. Para un grupo G, un carácter de G en K es un homomorfismo de grupos $\varphi\colon G \to K^*$. Demuestra: Si $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ son caracteres de G en K^* con $\varphi_i \neq \varphi_j$ para $i \neq j$, entonces $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ es una familia linealmente independiente en el espacio K^G de mapeos de G en K. Instrucciones:

(a) Tenemos que demostrar que para elementos $a_1, \ldots, a_n \in K$ el sistema de ecuaciones

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi(g) = 0 \text{ para todo } g \in G$$

solo tiene la solución trivial.

(b) Procedemos por inducción sobre n. Verifica el caso $n = 1$.

(c) Para el paso $n-1 \mapsto n$ escogemos $h \in G$ con $\varphi_1(h) \neq \varphi_n(h)$. Multiplica por un lado $(*)$ con $\varphi_n(h)$ y por otro lado sustituya g por hg. Compara.

Ejercicio 38

Sea $K(T)$ el campo de funciones racionales sobre un campo K, y $U := \frac{f}{g} \in K(T)$ una función racional no constante ($f, g \in K[T]$ sin divisor común no trivial). Demuestra:

(a) U es trascendente sobre K.

(b) $f(X) - Ug(X) \in (K(U))[X]$ es un polinomio irreducible con cero T en la extensión $K(T) \supset K(U)$.

(c) $K(U) = K(T)$ si y solamente si $\max\{\deg(f), \deg(g)\} = 1$.

(d) Los K-automorfismos σ de $K(T)$ son precisamente de la forma

$$\sigma(T) = \frac{aT + b}{cT - d} \quad (a, b, c, d \in K; ad - bc \neq 0)$$

Ejercicio 39
Sea $L \supset K$ una extensión de Galois, y $a \in L$ con $\varphi(a) \neq a$ para todo $\varphi \in \mathrm{Aut}(L;K) \setminus \{Id_K\}$. Demuestra: $K[a] = L$.

Ejercicio 40
Determina los grupos de Galois de los polinomios $X^4 - 4$ y $X^4 - 6X^2 + 5$ como grupos de permutaciones de sus respectivas raíces.

A discutir en la Ayudantía del 9 de Mayo.