

Tarea 2**Ejercicio 5**

Sea G un grupo finito con subgrupos A, B y C . Demuestra:

- (a) $B \subset A$ implica $[A : B] \geq [C \cap A : C \cap B]$. Pista: trata de definir un mapeo inyectivo entre las clases laterales correspondientes.
- (b) $[G : A \cap B] \leq [G : A] \cdot [G : B]$.
- (c) Sea $B \subset A$. Si x_1, \dots, x_n es un sistema de representantes de las clases laterales a izquierda de G con respecto a A , además y_1, \dots, y_m un sistema de representantes de las clases laterales a izquierda de A con respecto a B , entonces $\{x_i y_j\}_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m}$ es un sistema de representantes de las clases laterales a izquierda de G con respecto a B .
- (d) $A \cup B$ es un subgrupo de G si y solamente si $A \subset B$ o $B \subset A$.
- (e) Si $g \cdot g = e$ para todo $g \in G$ entonces G es abeliano.

Ejercicio 6

Sea $G = (G, \cdot)$ un grupo. Demuestra:

- (a) Si $H < G$ con $[G : H] = 2$ entonces H es normal en G .
- (b) Sean N_1, N_2, \dots, N_k subgrupos normales de G , y $D := \bigcap_{i=1}^k N_i$. Entonces G/D es isomorfo a un subgrupo de $G/N_1 \times G/N_2 \times \dots \times G/N_k$.
- (c) Hay precisamente dos clases de isomorfía de grupos de orden 4.
Pista: Sea G un grupo de orden 4. Verifica que si G no es cíclico, $g^2 = e$ para todo $g \in G$. Usa (b).
- (d) Sea $N \triangleleft G$ con $[G : N] = 4$, entonces G tiene un subgrupo normal M con $[G : M] = 2$. Pista: Utiliza (c).
- (e) Se dice que G es *simple* si solo los subgrupos triviales $\{e\}$ y G son normales. Sea en este caso $\phi: G \rightarrow H$ un homomorfismo de grupos. Si $|G| \neq 2$ y $A < H$ con $[H : A] = 2$ entonces $\text{Im}(\phi) < A$.

Ejercicio 7

Sea $G = \text{GL}_2(\mathbb{C})$ el grupo de las matrices invertibles de tamaño 2×2 sobre los números complejos, y

$$Q := \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle < G$$

el grupo cuaternio. Demuestra: (a) $|Q| = 8$; (b) $Z(Q) = 2$; (c) todos los elementos de $Q \setminus Z(Q)$ tienen orden 4; (d) Q tiene precisamente un elemento de orden 2; (e) todo subgrupo de Q es normal.

Ejercicio 8

Calcula la tabla de multiplicación del grupo simétrico \mathfrak{S}_3 y demuestra que \mathfrak{S}_3 es isomorfo a un producto semidirecto de grupos cíclicos $C_3 \rtimes_{\psi} C_2$ (donde C_k denota un grupo cíclico con $|C_k| = k$). Describe el homomorfismo $\psi: C_2 \rightarrow \text{Aut}(C_3)$.

Ejercicio 9

Sea G un grupo y $N \triangleleft G$ un subgrupo normal de G . Demuestra: Si G tiene un subgrupo $H < G$ con $H \cap N = \{e\}$ tal que H es isomorfo a G/N , entonces G es isomorfo a un producto semidirecto $N \rtimes_{\phi} H$ para algun homomorfismo de grupos $\phi: H \rightarrow N$.

Problemas 5 y 6 para entregar por escrito antes de la Ayudantía del 27 de Agosto. Problemas 7, 8 y 9 para discusión en la Ayudantía.