Semestre 2015/1

Algebra Moderna
Christof Geiss

Tarea 3

Ejercicio 10
Sea $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ y $\mathfrak{S}_n$ el grupo simétrico correspondiente. Escribimos Id_n para el elemento neutro de $\mathfrak{S}_n$ Demuestra:

(a) Sean $\sigma = (i_1, i_2, \ldots, i_m)$ un m-ciclo y τ elemento de $\mathfrak{S}_n$, entonces $\tau\sigma\tau^{-1} = (\tau(i_1), \tau(i_2), \ldots, \tau(i_m))$.

(b) Las clases de conjugación en $\mathfrak{S}_n$ estan en biyección con las particiones de n, i.e. con el conjunto de sucesiones de números naturales $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ tal que $p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_n \geq 0$ y $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = n$.

(c) Si $\tau = \sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_r \in \mathfrak{S}_n$ es un producto de ciclos ajenos entonces $|\tau| = \mathrm{mcm}(|\sigma_1|, \ldots, |\sigma_r|)$, donde mcm denota el mínimo común múltiplo.

(d) $\{|\sigma| \mid \sigma \in \mathfrak{S}_{10}\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 20, 21, 30\}$

(e) Cada producto no trivial de dos transposiciones en $\mathfrak{S}_n$ es un 3-ciclo ó producto de dos 3-ciclos.

(f) $Z(\mathfrak{S}_n) = \{\mathrm{Id}_n\}$ si $n \geq 3$.

Ejercicio 11
Sea $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. Consideramos los elementos

$$\rho := (1, 2, \ldots, n) \text{ y } \sigma := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & n & n-1 & \cdots & 3 & 2 \end{smallmatrix}\right)$$

del grupo simétrico $\mathfrak{S}_n$. El subgrupo $\mathcal{D}_n := \langle \rho, \sigma \rangle$ se llama el *grupo diédrico* de grado n. Se identifíca con el grupo de simetrías del n-gono regular.

(a) Verifica las siguientes relaciones entre los generadores: $\rho^n = \mathrm{Id}_n$, $\rho^k \neq \mathrm{Id}_n$ para $k = 1, 2, \ldots n-1$, $\sigma^2 = \mathrm{Id}_n$, $\sigma\rho\sigma^{-1} = \rho^{-1}$.

(b) $\mathcal{D}_n \cong C_n \rtimes_\phi C_2$ para un homomorfismo de grupos $\phi\colon C_2 \to \mathrm{Aut}(C_n)$, donde C_k denota un grupo cíclico de orden k.

(c) Verfica directamente que $|\mathcal{D}_n| = 2n$. <u>Pista</u>: considera los valores $\rho^i\sigma^j(1)$ y $\rho^i\sigma^j(2)$ para las parejas $(i, j) \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \times \{0, 1\}$.

(d) Encuentra un segundo elemento $\tau \in \mathcal{D}_n$ con $|\tau| = 2$ y $\mathcal{D}_n = \langle \sigma, \tau \rangle$.

(e) $Z(\mathcal{D}_n) = \{\mathrm{Id}_n\}$ si n es impar.

Ejercicio 12
Demuestra: El grupo alternante $\mathfrak{A}_4$ es isomorfo al grupo de *rotaciones* del tetraedro regular. Pista: Identifica las 12 rotaciones del tetraedro, y verfica que cada una de estas rotaciones induce una permutación par de los 4 vertices del tetraedro.

Ejercicio 13
Un grupo G se llama *simple* si $\{e\}$ y G son los únicos dos subgrupos normales de G. Por ejemplo los grupos $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ con p un primo son los únicos grupos abelianos que son simples. Sea $N_\bullet := (G = N_0 \geq N_1 \geq N_2 \geq \cdots \geq N_n = \{e\})$ una serie normal de G. La *longitud* de $N_\bullet$ es el número de sus factores no triviales. $N_\bullet$ se llama *serie de composición* de G si todos los factores N_{i-1}/N_i son simples o trivial. Sea $M_\bullet := (G = M_0 \geq M_1 \geq \cdots \geq M_m = \{e\})$ otra serie normal. $N_\bullet$ se llama *refinación* de $M_\bullet$ si $N_0, N_1, \ldots, N_n$ es una subsecuencia de $M_0, M_1, \ldots, M_m$. Las series $N_\bullet$ y $M_\bullet$ son *equivalentes*, si tienen la misma longitud, y además existe una biyección entre sus factores no triviales respectivos, tal que estos factores sean isomorfos. Demuestra:

(a) Todo grupo finito tiene una serie de composición.

(b) Todas las series de composición de un grupo finito soluble son equivalentes. (sin usar (e)).

(c) Sean $A \triangleleft A'$ y $B \triangleleft B'$ subgrupos de G. Entonces se tiene un isomorfismo de grupos cocientes

$$\frac{A(A' \cap B')}{A(A' \cap B)} \cong \frac{B(B' \cap A')}{B(B' \cap A)}.$$

Pista: $D := (A' \cap B)(A \cap B')$ es un subgrupo normal de $B' \cap A'$. Verifica que el $A(A' \cap B') \to (A' \cap B')/D, ax \mapsto xD$ (para $a \in A, x \in A' \cap B'$) esta bien definido y suprayectivo. Su nucleo es $A(A' \cap B)$. Aprovecha la simetría del problema.

(d) Las dos series normales (arbitrarias) $N_\bullet$ y $M_\bullet$ del grupo G admiten refinaciones que son equivalentes. Pista: Sea $N_{i,j} := N_{i+1}(N_i \cap M_j)$. Entonces

$$N_{0,0} \geq N_{0,1} \geq \cdots \geq N_{0,m} \geq N_{1,0} \geq \cdots \geq N_{n-1,0} \geq \cdots \geq N_{n-1,m} = \{e\}$$

es una refinación de $N_\bullet$. Se puede definir una refinación análoga de $M_\bullet$. Usando (c), demuestra $N_{i,j}/N_{i,j+1} \cong M_{i,j}/M_{i+1,j}$.

(e) Todas las series de composición de un grupo G son equivalentes. Pista: Utiliza (d).

Ejercicios 10 y 13 para entregar, ejercicios 11 y 12 a discutir en la Ayudantía del 10 de Septiembre.