Semestre 2015/1 | Algebra Moderna
Christof Geiss

Tarea 4

Ejercicio 14
Consideramos el grupo $G := (\mathbb{Q}_+, \cdot)$ de los números racionales positivos con la multiplicación usual. Demuestra:

$$G \cong \coprod_{p \in P} \mathbb{Z} := \mathbb{Z}^{(P)},$$

donde P es un conjunto infinito numerable, y $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, +)$. Pista: Sea $P \subset \mathbb{N}$ el conjunto de los primos. Si $q \in \mathbb{Q}_+$ entonces existe un único $v = (v_p)_{p \in P} \in \mathbb{Z}^{(P)}$ tal que $q = \prod_{p \in \Pi} p^{v_p}$. Nota que en este producto "infinito" solo un número finito de factores es diferente a 1.

Ejercicio 15
Consideramos el grupo abeliano de los números racionales $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}, +)$, y su cociente $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Sea $P \subset \mathbb{N}$ el conjunto de los primos. Para $p \in P$ tenemos

$$S(p) := \{\bar{q} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{N} : p^k \bar{q} = \bar{0}\}$$

el p-grupo de Sylow en $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Demuestra:

(a) $\mathbb{Z}/\mathbb{Q} = \oplus_{p \in P} S(p)$.

(b) Para cada $k \in \mathbb{N}_+$ existe un único subgrupo C_{p^k} de orden p^k en $S(p)$. Este subgrupo es cíclico, y se tiene $C_p \subset C_{p^2} \subset C_{p^3} \subset \cdots \subset S(p)$.

(c) Un grupo abeliano $A = (A, +)$ se llama *divisible* si para cada $a \in A$ y $k \in \mathbb{N}_+$ existe $a' \in A$ con $k \cdot a' = a$. Con esta noción los grupos abelianos $\mathbb{Q}$ y $S(p) < \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ son divisibles. Pista: Nota que por ejemplo $1/2 + \mathbb{Z} = 6 \cdot (1/4 + \mathbb{Z}) \in S(2)$.

(d) Ningún grupo cíclico es divisible.

Ejercicio 16
Sea $\mathcal{D}_n = \langle \rho, \sigma \rangle$ como en Ejercicio 10. Demuestra:

(a) Cada subgrupo de $\langle \rho \rangle$ es normal en $\mathcal{D}_n$.

(b) $\langle \rho^2 \rangle$ es el subgrupo de conmutadores de $\mathcal{D}_n$.

(c) Si $p \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ es un primo y $n = p^k m$ con $k, m \in \mathbb{N}$ y $p \nmid m$, entonces $\langle \rho^m \rangle$ es el único p-grupo de Sylow en $\mathcal{D}_n$.

Ejercicio 17
Sea G un grupo finito y $H < G$ un subgrupo. Demuestra:

(a) $N := \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$ es un subgrupo normal de G que esta contenido en H. Pista: Considera la acción de G sobre las clases laterales izquierdas G/H por traslación izquierda, y el homomorfismo de grupos $G \to \mathfrak{S}(G/H)$ correspondiente.

(b) Para N como en (a) se tiene: $M \triangleleft G$ y $M \leq H$ implica $M \subset N$.

(c) Sea p el divisor primo más pequeño de $|G|$. Si $[G : H] = p$ entonces H es normal en G. Pista: Demuestra que $[H : N]$ es un divisor de $(p-1)!$ para N como en (a).

(d) Para cada primo p, la intersección de todos las p-grupos de Sylow en G es normal en G. Cada p-subgrupo normal de G esta contenido en esta intersección.

Ejercicio 18
(a) Sean $p \neq q$ dos números primos. Demuestra que cada grupo G de orden $p^2 q$ tiene un grupo de Sylow que es normal en G.

(b) Cada grupo de orden 200 tiene un subgrupo normal abeliano que no es trivial.

Ejercicio 19
Demuestra:

(a) Si un grupo G de orden 12 tiene un subgrupo de orden 6, entonces G tiene precisamente un subgrupo de orden 3.

(b) Sea G un grupo y $N < G$ con $[G : N] = 2$. Si $H < G$ y $H \not\subset N$, entonces H tiene un subgrupo de índice 2.

(c) Cada grupo de orden 12 que no contiene un subgrupo de orden 6 es isomorfo a $\mathfrak{A}_4$. Pista: La acción de G por conjugación sobre el conjunto de 3-grupos de Sylow induce una inclusión de G en $\mathfrak{S}_4$.

(d) $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A}_4)$ es isomorfo a $\mathfrak{S}_4$. Pista: La acción de $\mathfrak{S}_4$ sobre $\mathfrak{A}_4$ por conjugación induce una inyección de $\mathfrak{S}_4$ en $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A}_4)$. Acota $|\mathrm{Aut}(\mathfrak{A}_4)|$ al contar los elementos de cada orden posible en $\mathfrak{A}_4$.

Ejercicio 20

(a) Determina la estructura y el número de los 2-grupos de Sylow en $\mathfrak{S}_5$. ¿Cuántos 5-subgrupos de Sylow tiene $\mathfrak{S}_5$?

(b) Demuestra que todos los subgrupos de orden 10 en de $\mathfrak{S}_5$ estan contenidos en $\mathfrak{A}_5$.

(c) Demuestra que $\mathfrak{S}_5$ no tiene subgrupos de orden 15.

(d) Demuestra que $\mathfrak{S}_5$ no tiene subgrupos de orden 30. Pista: Usando (c) demuestra que tal subgrupo H seria generado por un 3-ciclo y un 5-ciclo. Entonces H sería un subgrupo de $\mathfrak{A}_5 = \mathfrak{A}_5'$.

(e) Demuestra: El único subgrupo de $\mathfrak{S}_5$ de orden 60 es $\mathfrak{A}_5$.

Ejercicios 16, 18 y 19 para entregar, Ejercios 14, 15, 17 y 20 a discutir en la Ayudantía del 17 de Septiembre.