Semestre 2015/1 Algebra Moderna
Christof Geiss

Tarea 5

Ejercicio 21
Sea $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. Demuestra:

(a) Sean $a, b \in \{1, 2, \ldots, n\}$ dos elementos diferentes. El grupo alternante $\mathfrak{A}_n$ es generado por los 3-ciclos (a, b, k) con $k \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{a, b\}$. Pista: Es suficiente, expresar todo 3-ciclo como producto de los 3-ciclos mencionados. Distingue los casos (a, u, b), (a, u, v), (b, u, v) y (u, v, x) para $u, v, x \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{a, b\}$.

(b) Sea $N \lhd \mathfrak{A}_n$ un subgrupo normal. Si N contiene un 3-ciclo, entonces $N = \mathfrak{A}_n$. Pista: Sea (a, b, c) un 3-ciclo. Encuentra para todo $k \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{a, b\}$ una permutación $\sigma_k \in \mathfrak{A}_n$ tal que $(a, b, k) = \sigma_k(a, b, c)\sigma_k^{-1}$.

(c) Sea ahora $n \geq 5$ y $N \lhd \mathfrak{A}_n$. Si $N \neq \mathfrak{A}_n$ y $\sigma \in N \setminus \{\mathrm{Id}_n\}$ entonces $\mathrm{Mov}(\sigma) := |\{k = 1, 2, \ldots, n \mid \sigma(k) \neq k\}| \geq 5$.

(d) El grupo $\mathfrak{A}_n$ es simple si $n \geq 5$. Pista: Sea $N \lhd \mathfrak{A}_n$ un subgrupo normal no trivial. Considaremos un $\sigma \in N \setminus \{\mathrm{Id}_n\}$ tal que $\mathrm{Mov}(\sigma)$ sea minimal en $N \setminus \{\mathrm{Id}_n\}$. Escribimos σ como producto de ciclos ajenos, con los ciclos mas largos primero. Por (b) y (c) solo tenemos que distinguir los siguientes casos: $\sigma = (a, b, c, d, \ldots) \cdots$, $\sigma = (a, b, c)(d, e, \ldots) \cdots$ y $\sigma = (a, b)(c, d)(e, f) \cdots$. Estudia $\sigma' := \tau^{-1}\sigma^{-1}\tau\sigma \in N$ con $\tau = (b, c, d)$ para llegar a una contradicción.

Ejercicio 22
Consideramos los anillos cociente $\mathbb{Z}_m := \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ para $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

(a) Demuestra: $k + m\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}_m$ es una unidad si y solamente si $\mathrm{mcd}(k, m) = 1$.

(b) Demuestra que el grupo de unidades $\mathbb{Z}_m^*$ es isomorfo al grupo de automorfismos $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_m, +)$ del grupo aditivo.

(c) Demuestra que en caso $\mathrm{mcd}(m_1, m_2) = 1$ se tiene $\mathbb{Z}_{m_1 \cdot m_2}^* \cong \mathbb{Z}_{m_1}^* \times \mathbb{Z}_{m_2}^*$.

Ejercicio 23
Sea R un anillo conmutativo con $0 \neq 1_R \in R$, y $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Consideramos el anillo de matrices $S := \mathrm{Mat}(n \times n, R)$. Demuestra:

(a) S es anillo no conmutativo con 1, no libre de divisores de 0.

(b) Los ideales de S son precisamente de la forma $\mathrm{Mat}(n \times n, I)$ para algún ideal I de R. Pista: Para $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y $m \in \mathrm{Mat}(n \times n, R) = S$ sea $m_{i,j}$ la componente (i, j) de m. Si $J \subset S$ es un ideal demuestra que $J_{i,j} := \{m_{i,j} \mid m \in J\}$ es un ideal de R, que no depende de i y j.

(c) Encuentra un ejemplo de un anillo simple (i.e. que no tiene ideales no triviales) que no sea un campo.

Ejercicio 24
(a) Deduzca del teorema Chino de Residuos (la versión vista en clase) el siguiente resultado: Sean $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{Z}$ con $\mathrm{mcd}(z_i, z_j) = 1$ para todo $i \neq j$. Entonces para cualquier $(r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{Z}^n$ existe un $x \in \mathbb{Z}$ con $x \equiv r_i \pmod{z_i}$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Si x' es otra solución, entonces $x - x' \in z_1 z_2 \cdots z_n \mathbb{Z}$.

(b) Encuentra todos los $x \in \mathbb{Z}$ que cumplan las siguientes 4 congruencias: $x \equiv 1 \pmod{7}$, $x \equiv 2 \pmod{8}$, $x \equiv 3 \pmod{9}$, $x \equiv 4 \pmod{11}$.

Ejercicios 22 y 24 para entregar, ejercicios 21 y 23 para discutir an la Ayudantía del 1 de octubre.