Semestre 2015/1 | Algebra Moderna
Christof Geiss

Tarea 6

Ejercicio 25
Sea R un anillo conmutativo, no necesariamente con 1, y que solo tenga los ideales triviales $\{0\} \neq R$. Demuestra:

(a) Sea $r \in R\{0\}$ con $Rr = \{0\}$. Entonces $\mathbb{Z} \cdot r$, el *subgrupo* de $(R, +)$ que es generado por r, es un ideal de R.

(b) Para $r \in R$ con $R \cdot r = R$ se tiene $\{s \in R \mid s \cdot r = 0\} = \{0\}$

(c) R es un campo (y en particular tiene 1) o $(R, +) \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ para algún primo p y $r \cdot s = 0$ para todo $r, s \in R$.

Ejercicio 26
Demuestra que las siguientes tres condiciones para un anillo R son equivalentes:

(a) Todo ideal I de R es finitamente generado, es decir existen $a_1, a_2, \ldots, a_m \in I$ con $(a_1, \ldots, a_m) = I$.

(b) Para cada cadena ascendente de ideales $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \cdots$ de ideales en R existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $I_n = I_{n+k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

(c) Cada familia $\mathcal{I}$ de ideales en R tiene un elemento máximo, es decir que existe $I \in \mathcal{I}$ tal que $I \subset J$ para algún $J \in \mathcal{I}$ implica $I = J$.

Recuerda que estas condiciones se cumplen si y solamente si R es Noetheriano.

Ejercicio 27
Sea R un anillo conmutativo con 1.

(a) Un elemento $r \in R$ se llama nilpotente, si existe un $n \in \mathbb{N}$ con $r^n = 0$. Demuestra que el conjunto de los elementos nilpotentes de R forma un ideal. Pista: En R vale la formula binomial para $(a + b)^n$.

(b) Demuestra: Si $J \subset R$ es un ideal, entonces

$$\mathrm{nil}(J) := \{r \in R \mid r^n \in J \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}$$

es un ideal en R.

(c) Caracteriza los ideales I de $\mathbb{Z}$ que cumplan $I = \mathrm{nil}(I)$.

Ejercicio 28
Sea R un anillo conmutativo con 1.

(a) Sea $u \in R$ una unidad y $n \in R$ nilpotente. Entonces $u + n$ es una unidad.

(b) Sea $f = u + \sum_{i=1}^{d} n_i X^i \in R[X]$ con $u \in R$ una unidad y los $n_i \in R$ nilpotentes, entonces f es una unidad en $R[X]$. Pista: aplica (a) para $R[X]$.

(c) Si $f \in R[X]$ es una unidad, entonces es de la forma descrita en (b)

(d) Determina las unidades en $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})[X]$.

Ejercicios 25 y 26 para entregar, ejercicios 27 y 28 a discutir en la ayudantía del 8 de octubre.