Semestre 2015/1 Algebra Moderna

Christof Geiss

**Tarea 10**

**Ejercicio 40**
Sea $K$ un campo, $K(X) := \text{Frac}(K[X])$ el campo de funciones racionales sobre $K$, y $f \in K[X]$ un polinomio con $\deg(f) = n \geq 1$. Demuestra que $K(X) \supset K(f)$ es una extensión algebraica de grado $n$.

**Ejercicio 41**
Sea $L \supset K$ una extensión algebraica, y $f \in L[X]$. Demuestra:

(a) Si $f$ es irreducible, entonces existe un único polinomio irreducible y mónico $g \in K[X]$, tal que $f \mid g$ en $L[X]$.

(b) Si $f$ no es necesariamente irreducible y $\deg(f) \geq 1$ existe un polinomio $g \in K[X] \setminus \{0\}$ con $f \mid g$ en $L[X]$.

**Ejercicio 42**
El objetivo de este ejercicio es la construcción de la cerradura algebraica de un campo, siguiendo E. Artin. Para eso hay que extender el siguiente croquis: Sea $k$ un campo y $\Sigma$ el conjunto de polinomios irreducibles y mónicos en $k[X]$. Consideramos $S = k[X_f \mid_{f \in \Sigma}]$, es decir el anillo de polinomios cuyos indeterminadas estan parametrizados por los elementos de $\Sigma$. Sea $\mathfrak{a}$ el ideal de $S$ que es generado por $\{f(X_f) \mid f \in \Sigma\}$. Demuestra que $1_S \notin \mathfrak{a}$. Utiliza el Lema de Zorn para demostrar que $S$ tiene un ideal máximo $\mathfrak{m}$ que contiene a $\mathfrak{a}$. Demuestra que $K_1 := S/\mathfrak{m}$ es una extensión de campo de $k$ de tal forma que todo elemento de $\Sigma$ tiene un cero en $K_1$. Repite la construcción con $K_1$ en lugar de $k$ para obtener un campo $K_2$ etcétera. Demuestra que $L = \cup_{i \in \mathbb{N}} K_i$ es un campo algebraicamente cerrado. Entonces $\overline{k}$, el conjunto de los elementos de $L$ que son algebraicos sobre $k$, es una cerradura algebraica de $k$.

**Ejercicio 43**
Determina para los siguientes polinomios en $\mathbb{Q}[X]$ un conjunto generador para su campo de descomposición sobre $\mathbb{Q}$, y calcula en cada caso el grado de estos campos sobre $\mathbb{Q}$:

$$X^4 - 2X^2 + 9,\ X^4 - 16X^2 + 4,\ X^4 + 4,\ X^3 - 7,\ X^6 + 4X^4 + 4X^2 + 3$$

**Ejercicio 44**
Sea $f = X^3 + X^2 - Y \in \mathbb{Q}[X, Y]$.

(a) Demuestra que $A = \mathbb{Q}[X, Y]/(f)$ es un dominio entero que contiene a $\mathbb{Q}$ como un subanillo.

(b) Demuestra que el homomorfismo de anillos

$$\alpha\colon \mathbb{Q}[X] \to A \text{ determinado por } \alpha_{|\mathbb{Q}} = \mathrm{Id}_{\mathbb{Q}} \text{ y } \alpha(X) = X + (f)$$

es inyectivo.

(c) ¿Es el campo de fracciones $\mathrm{Frac}(A)$ algebraico sobre $\mathbb{Q}$?

**Ejercicios 40, 41 a discutir, ejercicios 42 y 43 para entregar en la Ayudantía del 5 de Noviembre.**