Semestre 2015/1 | Algebra Moderna
Christof Geiss

Tarea 11

Ejercicio 45
(Independencia lineal de caracteres). Sea K un campo, $K^* := K \setminus \{0\}$ el grupo multiplicativo de K. Para un grupo G, un carácter de G en K es un homomorfismo de grupos $\varphi\colon G \to K^*$. Demuestra: Si $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ son caracteres de G en K^* con $\varphi_i \neq \varphi_j$ para $i \neq j$, entonces $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ es una familia linealmente independiente en el espacio K^G de mapeos de G en K. Instrucciones:

(a) Tenemos que demostrar que para elementos $a_1, \dots, a_n \in K$ el sistema de ecuaciones
$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi(g) = 0 \text{ para todo } g \in G$$
solo tiene la solución trivial.

(b) Procedemos por inducción sobre n. Verifica el caso $n = 1$.

(c) Para el paso $n-1 \mapsto n$ escogemos $h \in G$ con $\varphi_1(h) \neq \varphi_n(h)$. Multiplica por un lado $(*)$ con $\varphi_n(h)$ y por otro lado sustituya g por hg. Compara.

Ejercicio 46
Sea $K(T)$ el campo de funciones racionales sobre un campo K, y $U := \frac{f}{g} \in K(T)$ una función racional no constante ($f, g \in K[T]$ sin divisor común no trivial). Demuestra:

(a) U es trascendente sobre K.

(b) $f(X) - Ug(X) \in (K(U))[X]$ es un polinomio irreducible con cero T en la extensión $K(T) \supset K(U)$.

(c) $K(U) = K(T)$ si y solamente si $\max\{\deg(f), \deg(g)\} = 1$.

(d) Los K-automorfismos σ de $K(T)$ son precisamente de la forma
$$\sigma(T) = \frac{aT + b}{cT - d} \quad (a, b, c, d \in K; ad - bc \neq 0)$$

Ejercicio 47
Sea $L \supset K$ una extensión de Galois, y $a \in L$ con $\varphi(a) \neq a$ para todo $\varphi \in \mathrm{Aut}(L; K) \setminus \{Id_K\}$. Demuestra: $K[a] = L$.

Ejercicio 48
Determina los grupos de Galois de los polinomios $X^4 - 4$ y $X^4 - 6X^2 + 5$ como grupos de permutaciones de sus respectivas raíces.

Ejercicio 49
Sea K un campo con $\mathrm{char}(K) = p > 0$. Demuestra:

(a) $F_p \colon K \to K, \alpha \mapsto \alpha^p$ es un homomorfismo de campos.

(b) Para $f \in K[X]$ se tiene $D(f) = 0$ si y solamente si existe un polinomio $g \in K[X]$ con $f = g(X^p)$.

(c) K es perfecto si F_p es suprayectivo. Pista: Verifica que en este caso ningun polinomio $f \in K[X]$ con $D(f) = 0$ es irreducible. En particular, todo campo finito es perfecto.

Ejercicio 50
En la clase comenzamos a discutir el campo de descomposición $F \supset \mathbb{Q}$ del polinomio $f := X^4 - X^2 - 1 \in \mathbb{Q}[X]$. Denotamos los ceros de f como sigue:

$$x_1 = \frac{\sqrt{1+\sqrt{5}}}{\sqrt{2}},\ x_2 = -x_1, x_3 = \frac{\sqrt{1-\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}, x_4 = -x_3.$$

Concluimos que el grupo de Galois $G := \mathrm{Gal}(f)$ era un grupo diédrico D_4.

(a) Describa G como subgrupo de $\mathfrak{S}(\{x_1, x_2, x_3, x_4\})$ y justifica.

(b) Describa todos los campos intermedios L de $K \supset \mathbb{Q}$ y sus respectivas inclusiones. ¿Para cuáles de estos campos intermedios es $L \supset \mathbb{Q}$ una extensión de Galois? Usa el teorema principal de la teoría de Galois para justificar el resultado.

Ejercicio 51
Consideramos los campos

$$L_1 := \mathbb{Q}[\sqrt{1+2i}, \sqrt{1-2i}],\ L_2 := \mathbb{Q}[\sqrt{6+2\sqrt{-7}}, \sqrt{6-2\sqrt{-7}}].$$

Demuestra que las extensiones de campos $L_i \supset \mathbb{Q}$ son de Galois para $i = 1, 2$. Determina en ambos casos el grupo de Galois y todos los campos intermedios.

Ejs. 48 y 50 para entregar, el resto a discutir el 19 de Noviembre.