Semestre 2015/2

Representaciones de Álgebras
Christof Geiss

**Tarea 1**

**Ejercicio 1**
Considera la categoría $\mathcal{P}$ de grupos abelianos "punteados". Los objetos de $\mathcal{P}$ son parejas $(S, A)$, donde $A$ es un grupo abeliano y $S$ es un subgrupo de $A$. Los morfismos son

$$\mathcal{P}((S, A), (T, B)) := \{f \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, B) \mid f(S) \subset T\}.$$

Demuestra que $\mathcal{P}$ es una categoría aditiva donde cada morfismo tiene un núcleo y un conúcleo, pero no es una categoría abeliana.

**Ejercicio 2**
Sea $\mathbb{F}_2$ el campo con dos elementos y $K := \mathbb{F}_2(t)$ el campo de funciones racionales sobre $\mathbb{F}_2$ (i.e. $K$ es el campo de fracciones del anillo de polinomios $\mathbb{F}_2[t]$). Consideramos el $K$-álgebra de dimensión finita $A := K[X]/(X^4 - t^2)$. Demuestra que $B := A/\operatorname{rad}(A) \cong K[X]/(X^2-t)$ , pero $A$ no contiene ningún subálgebra isomorfo al campo $B$. Explica porque el teorema de Malcev no aplica. Pistas: $X^4 - t^2 = (X^2 - t)^2$; demuestra que $A$ no contiene ningún elemento $z = k_0 + k_1X + k_2X^2 + k_3X^3$ con $z^2 = t$.

**Ejercicio 3**
Sea $A$ un anillo y

$$0 \to L \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} N \to 0$$

una sucesión corta exacta de $A$-módulos a derecha. Demuestra que $i$ admite una retracción $r$ (i.e. $r \in \operatorname{Hom}_A(M, L)$ con $r \circ i = \operatorname{id}_L$) si y solamente si $p$ admite una sección $s$ (i.e. $s \in \operatorname{Hom}_A(N, M)$ con $p \circ s = \operatorname{id}_N$).

**Ejercicio 4**
Sean $A$ y $B$ anillos y $N \leq M \in \operatorname{mod} A$.

(a) Encuentra un ejemplo de un homomorfismo de anillos $g\colon A \to B$, tal que $g(\operatorname{rad}(A)) \not\subset \operatorname{rad}(B)$. Esto contradice [ASS, I.7.1].

(b) Demuestra: $\operatorname{rad}(M/N) \supseteq (N + \operatorname{rad}(M))/N$;

(c) Demuestra: si $N \subseteq \operatorname{rad}(M)$ entonces $\operatorname{rad}(M/N) = \operatorname{rad}(M)/N$.

**Fecha de entrega**: martes 24 de febrero 2015, antes de la aydantía.