Semestre 2015/2

Representaciones de Álgebras
Christof Geiss

Tarea 4

Sea K un campo.

Ejercicio 13

Consideramos el carcaj con dos lazos $Q\colon \begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[loop right, "\beta"] \end{tikzcd}$, y $A := KQ$ el álgebra de caminos correspondiente.

(a) Demuestra que el ideal $I = \langle \alpha\alpha, \alpha\beta\alpha, \alpha\beta^2\alpha, \ldots, \alpha\beta^i\alpha, \ldots \rangle$ de A no es finitamente generado.

(b) Considera para $\Lambda := (\lambda, \lambda_{11}, \ldots, \lambda_{33}) \in K^{10}$ las matrices

$$M^\Lambda(\alpha) := \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{12} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{23} \end{pmatrix} \text{ y } M^\Lambda(\beta) := \begin{pmatrix} \lambda_{11} & 1 & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & 1 \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix}.$$

Definimos un orden total $<$ sobre K. Demuestra, que en caso que $\lambda < \lambda_{12} < \lambda_{23}$ y $\lambda_{21} \neq 0$ la representación M^Λ de Q con $M_1^\Lambda = K^3$ es simple. Si $\Lambda' \in K^{10}$ con las mismas características, entonces demuestra que $M^\lambda \cong M^{\Lambda'}$ si y solamente si $\Lambda = \Lambda'$. Generaliza para dimensiones mas altas.

Ejercicio 14

Consideramos el carcaj de Kronecker $Q\colon 1 \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} 2$, y para $t \in K$ la representación M_t con $(M_t)_1 = K^2 = (M_t)_2$ y mapeos de estructura $M_t(\alpha) = \mathrm{id}_{K^2}$ y $M_t(\beta) = \left(\begin{smallmatrix} t & 1 \\ 0 & t \end{smallmatrix}\right)$. Demuestra: M_t es inescindible para todo $t \in K$ y $M_t \cong M_{t'}$ si y solamente si $t = t'$.

Ejercicio 15

Consideramos el carcaj "mancuerna"

$$Q\colon \begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "\sigma"] \arrow[r, bend left, "\alpha"] & 2 \arrow[loop right, "\rho"] \arrow[l, bend left, "\beta"] \end{tikzcd}$$

y para $t \in K$ el ideal $J_t := \langle \sigma\alpha - t\alpha\rho, \sigma^2 - \alpha\beta, \rho\beta - \beta\sigma, \rho^2 - \beta\alpha \rangle$ de KQ.

(a) Demuestra: J_t es admisible si y solamente si $t \neq 1$.

(b) Determina explícitamente para $t \in K \setminus \{0, 1\}$ las representaciones proyectivas resp. inyectivas inescindibles de (Q, J_t).

Fecha de entrega: Martes 24 de marzo, antes de la ayudantía.