Semestre 2015/2 Representaciones de Álgebras
Christof Geiss

Tarea 5

Ejercicio 16
Sea K un campo y Q un carcaj sin ciclos orientados.

(a) Sea M un KQ-módulo a derecha. Demuestra que lo siguiente es una resolución proyectiva de M:

$$0 \to \bigoplus_{\alpha\in Q_1} Me_{s\alpha} \otimes_K e_{t\alpha}KQ \xrightarrow{f_M} \bigoplus_{i\in Q_0} Me_i \otimes_K e_iKQ \xrightarrow{g_M} M \to 0,$$

donde la restricción de f_M al sumando con la etiqueta α actua como

$$f_M(m_{s\alpha} \otimes e_{t\alpha}p) := m_{s\alpha}\alpha \otimes e_{t\alpha}p - m_{s\alpha} \otimes \alpha \cdot p$$

y g_M es la multiplicación natural. Pista: considera los mapeos K-lineales $g'_M\colon M \to \oplus_{i\in Q_o} Me_i \otimes e_iKQ$ definido por $me_i \mapsto me_i \otimes e_i$ y $f'_m\colon \oplus_{i\in Q_0} Me_i \otimes e_iKQ \to \oplus_{\alpha\in Q_i}$ definido por $m_i \otimes \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_l \mapsto \sum_{i=1}^{l} m\cdot\alpha_1\cdots\alpha_{i-1} \otimes \alpha_{i+1}\cdots\alpha_n \in \oplus_{i=1}^{l} Me_{s\alpha_i} \otimes e_{t\alpha_i}KQ$
Concluya que la dimensión global de KQ es a lo mas 1.

(b) Sea $R \in \mathbb{Z}^{Q_0\times Q_0}$ con

$$R_{ij} := \delta_{i,j} - \#\{\alpha \in Q_1 \mid s\alpha = i \text{ y } t\alpha = j\}$$

Demuestra que R^{-T} (el inverso transpuesto de R) es la matriz de Cartan de KQ. Pista: verifica que R representa la forma homológica bilineal de KQ en la base dada por las clases de los módulos simples.

Sea A un anillo. Recordemos: el producto fibrado (o "pull-back") de un par de morfismos $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$ entre A-módulos es el submódulo $X \times_{(f,g)} Y := \{(x,y) \in X \oplus Y \mid f(x) = g(y)\}$ de $X \oplus Y$, junto con los morfismos $f'\colon X \times_{(f,g)} Y \to X, (x,y) \mapsto x$ y $g'\colon X \times_{(f,g)} Y \to Y, (x,y) \mapsto y$. Tiene la siguiente propiedad universal: si $X \xleftarrow{f''} P \xrightarrow{g''} Y$ es un par de morfismos con $ff'' = gg$", entonces existe un único morfismo $p\colon P \to X \times_{(f,g)} Y$ tal que $f'' = f'p$ y $g'' = g'p$. El coprudcto fibrado (o "push out") $X \coprod_{(f,g)} Y$ se construye de forma dual y tiene la propiedad universal dual. Ambos contrucciones son únicas salvo isomorfismo canónico.

Ejercicio 17
Sea A un anillo y $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ una sucesión corta exacta de A-módulos. Demuestra:

(a) Para todo $v \in \mathrm{Hom}_A(V, N)$ existe un diagrama conmutativo de A-módulos con renglones exactos:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f'"] \arrow[d, equal] & M \times_{(g,v)} V \arrow[r, "v'"] \arrow[d, "g'"] & V \arrow[r] \arrow[d, "v"] & 0\,, \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"'] & M \arrow[r, "g"'] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde f' es la restricción de $L \to M \oplus V, l \mapsto (f(v), 0)$.

(b) Dualmente, para todo $u \in \mathrm{Hom}_A(L, U)$ existe un diagrama conmutativo de A-módulos con renglones exactos:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f'"'] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0\,, \\
0 \arrow[r] & U \arrow[r, "u'"'] & U \coprod_{(u,f)} M \arrow[r, "g'"'] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

con g' inducido por $U \oplus M \to N, (u, m) \mapsto g(m)$.

(c) Sea

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & L \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"'] & N \arrow[r] \arrow[d, "w"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & L' \arrow[r, "f'"'] & L' \arrow[r, "g'"'] & N' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

un diagrama conmutativo de A-módulos con renglones exactos. Si u es un isomorfismo, el cuadrado conmutativo a la derecha tiene la propiedad universal de un diagrama "pull-back" de (g', w). Si w es un isomorfismo, el cuadrado conmutativo a la derecha tiene la propiedad universal de un diagrama "push-out" de (u, f).

Ejercicio 18
Sea A un anillo y consideramos el siguiente diagrama conmutativo de A-

módulos con renglones exactos:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & N \arrow[r] \arrow[d, "w"] & 0\ . \\
0 \arrow[r] & L' \arrow[r, "f'"] & M' \arrow[r, "g'"] & N' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Demuestra que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) Existe $h' \in \mathrm{Hom}_A(M, L')$ con $h'f = u$.

(b) Existe $h'' \in \mathrm{Hom}_A(N, M')$ con $g'h'' = w$.

(c) Existen homomorfismos $h' \in \mathrm{Hom}_A(M, L')$ y $h'' \in \mathrm{Hom}_A(N, M')$ con $f'h' + h''g = v$.

Además, si en este caso w es un isomorfismo, entonces el segundo reglón se escinde, y si v es un isomorfismo el primer renglón se escinde.

Nota: Para entregar el 21 de marzo antes de la ayudantía.