Semestre 2016/2 Algebras de Lie y sus Representaciones

Christof Geiss

Daniel Labardini

Tarea 1

Ejercicio 1

Sea k un campo.

(a) Sea $\mathfrak{g}$ un k-álgebra de Lie. Para $x \in \mathfrak{g}$ consideramos el endomorfismo k-lineal $\mathrm{ad}(x)$ de $\mathfrak{g}$ que esta definido por $\mathrm{ad}(x)\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, y \mapsto [x, y]$. Demuestra que el mapeo

$$\mathrm{ad}\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}), x \mapsto \mathrm{ad}(x),$$

es un homomorfismo de álgebras de Lie.

(b) Sea $A = (A, \cdot)$ un k-espacio vectorial junto con un mapeo k-bilineal $A \times A \to A, (a, b) \mapsto a \cdot b$. Entonces una *derivación* de A es un mapeo k-lineal $\delta\colon A \to A$ tal que $\delta(a \cdot b) = \delta(a) \cdot b + a \cdot \delta(b)$ para todo $a.b \in A$. Demuestra: $\mathrm{Der}_k(A) := \{\delta \in \mathfrak{gl}(A) \mid \delta \text{ es derivación de A}\}$ es un subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}(A)$.

Ejercicio 2

Demuestra:

(a) Salvo isomorfía solo hay dos álgebras de Lie complejas de dimensión 2.

(b) Si $\tilde{e}, \tilde{f}, \tilde{h}$ es una base de $\mathfrak{sl}(2; k)$ con $[\tilde{h}, \tilde{e}] = 2\tilde{e}$ y $[\tilde{h}, \tilde{f}] = -2\tilde{f}$, entonces $[\tilde{e}, \tilde{f}] = \mu\tilde{h}$ para algún $\mu \in k \setminus \{0\}$.

(c) El álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$ es simple.

Ejercicio 3

Sea k un campo. Consideramos el mapeo k-lineal:

$$\rho\colon \mathfrak{gl}(n; k) \to \mathfrak{gl}(k[X_1, X_2, \dots, X_n]), E_{ij} \mapsto X_i\partial_j \text{ para todos } i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Aquí, los E_{ij} forman la bases estándar de $\mathfrak{gl}(n; k)$. Demuestra:

(a) ρ define una representación de $\mathfrak{gl}(n; k)$, y para cada $d \in \mathbb{N}_0$ los polinomios homogéneos de grado d forman un sumando directo $k[X_1, \dots, X_n]_d$ de esta representación.

(b) En caso $\mathrm{char}(k) = 0$ ó $\mathrm{char}(k) > d$, la representación $k[X_1, \ldots, X_n]_d$ de $\mathfrak{gl}(n; k)$ es simple.

(c) Explica porque, en la clasificación de las representaciones simples de dimensión finita de $\mathfrak{sl}(2; k)$ para un campo k con $\mathrm{char}(k) = 0$, la hipótesis de que k sea algebraicamente cerrado *no* es necesaria.

Ejercicio 4
Sea k un campo con $\mathrm{char}(k) \neq 2$. Demuestra:

(a) $\dim_k \mathfrak{sp}(2n; k) = 2n^2 + n$,

(b) $\mathfrak{sl}(4) \cong \mathfrak{so}(6)$ como álgebras de Lie.

Fecha de entrega: 12 de Febrero de 2016.