Semestre 2016/2 | Algebras de Lie y sus Representaciones
Christof Geiss
Daniel Labardini

Tarea 8

Ejercicio 29
Denotamos para V un k-espacio vectorial con $T(V)$ el álgebra tensorial sobre V, y recordamos que $T(V)$ es naturalmente graduado. Consideramos en $T(V)$ el ideal bilateral B que es generado por los elementos $v \otimes v$ con $v \in V$ y consideramos el cociente $\Lambda(V) := T(V)/B$ con la graduación inducida. Por convención, la componente homogénea de grado i de $\Lambda(V)$ se denota con $\Lambda^i(V)$, y la clase de un tensor $v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_l$ en $\Lambda^l(V)$ se denota con $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_l$. De esta forma $(\Lambda(V), \wedge)$ es un álgebra asociativo graduado. Demuestra:

(a) En $\Lambda(V)$ vale $v \wedge w = (-1)^{i \cdot j} w \wedge v$ para todo $v \in \Lambda^i(V)$ y $w \in \Lambda^j(V)$.

(b) Si $(v_1, \dots v_d)$ es una base ordenada de V, entonces los $v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \cdots \wedge v_{i_l}$ con $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_l \leq d$ forman una base de $\Lambda^l(V)$.

(c) Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie y $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ una representación de $\mathfrak{g}$, entonces $T(V)$ también es una representación de $\mathfrak{g}$ si definimos

$$x \cdot (w_1 \otimes w_2 \otimes \cdots \otimes w_l) := \\ x \cdot w_1 \otimes w_2 \otimes \cdots \otimes w_l + w_1 \otimes x \cdot w_2 \otimes \cdots \otimes w_l + \cdots + w_1 \otimes w_2 \otimes \cdots \otimes x \cdot w_l.$$

Esta definición induce también una estructura de representación de $\mathfrak{g}$ sobre cada $\Lambda^l(V)$

Ejercicio 30
Consideramos $\mathfrak{g} := \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$ con el subálgebra de Cartan

$$\mathfrak{h} := \{\mathrm{diag}(h_1, \dots h_{n+1}) \mid h_1 + \cdots + h_{n+1} = 0\}.$$

Definimos $\epsilon_i \in \mathfrak{h}^*$ por $\epsilon_i(\mathrm{diag}(h_1, \dots h_{n+1})) = h_i$. Recordamos que entonces $\alpha_i := \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$ para $i = 1, \dots, n$ es una base Δ del sistema de raíces $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Finalmente consideramos a $V := \mathbb{C}^{n+1}$ como la representación natural de $\mathfrak{g}$ y $(e_1, \dots, e_{n+1})$ denota la base estándar de V.

(a) Demuestra que los $\varpi_i := \epsilon_1 + \epsilon_2 + \cdots + \epsilon_i$ para $i = 1, \dots, n$ son los pesos fundamentales con respecto a Δ.

(b) Determina la descomposición de V en espacios de peso y demuestra que V es irreducible de peso más alto ϖ_1.

(c) Demuestra que $\Lambda^l(V)$ es la representación irreducible de peso más alto ϖ_l para $l = 1, 2, \ldots, n$. *Pista:* Los elementos de la base estándar $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_l}$ son vectores de peso $\epsilon_{i_1} + \cdots + \epsilon_{i_l}$. Concluya que ϖ_l es el único peso dominante de $\Lambda^l(V)$.

(d) Demuestra que la representación $\Lambda^l(V)$ es isomorfa al dual de $\Lambda^{n+1-l}(V)$. *Pista:* Demuestra que el "peso más bajo" de $\Lambda^l(V)$ es $-\varpi_{n+1-l}$

(e) Sean $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{N}_0$ y escribimos $L(\varpi_l) := \Lambda^l(V)$. Demuestra que

$$L(\varpi_1)^{\otimes p_1} \otimes L(\varpi_2)^{\otimes p_2} \otimes \cdots \otimes L(\varpi_n)^{\otimes p_n}$$

tiene una sumando directo simple con peso más alto $\sum_{i=1}^{n} p_i \varpi_i$.

Ejercicio 31
Sea k un campo. Demuestra:

(a) Sea $\mathfrak{g}$ un espacio vectorial sobre k y $b\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ un mapeo bilineal. Podemos considerar en el álgebra tensorial $T(\mathfrak{g})$ el ideal bilateral $I(b)$ que es generado por todos los elementos de la forma $x \otimes y - y \otimes x - b(x, y)$ para $x, y \in \mathfrak{g}$. Denotamos con U el anillo cociente $T(\mathfrak{g})/I(b)$. La composición $\mathfrak{g} \hookrightarrow T(\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow U$ es inyectiva si y solamente si b es antisimétrica y cumple la identidad de Jacobi.

(b) Cada homomorfismo entre dos álgebras de Lie se puede extender de una única forma a un homomorfismo (de álgebras asociativas) entre sus envolventes universales respectivas.

(c) Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie con dos subálgebras $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ como espacio vectorial. La multiplicación induce un mapeo (k-lineal) $U(\mathfrak{a}) \otimes U(\mathfrak{b}) \to U(\mathfrak{g})$ que es suprayectivo. Si además $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = 0$, este mapeo es un isomorfismo de espacios vectoriales.

(d) Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión finita y $b\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to k$ una forma bilineal, no degenerada e invariante. Escogemos una base $x_1, \ldots, x_d$ de $\mathfrak{g}$ y denotamos con $x^1, \ldots, x^d$ la base dual de $\mathfrak{g}$ con respecto a b, es decir $b(x_i, x^j) = \delta_{i,j}$. Entonces $C_b := \sum_{i=1}^{d} x_i x^i \in U(\mathfrak{g})$ no depende de la selección de la base y pertenece al centro de $U(\mathfrak{g})$.

Fecha de entrega: 6 de Mayo de 2016.