MÉTODOS DIAGRAMÁTICOS EN TEORÍA DE REPRESENTACIONES

C. CIBILS
F. LARRIÓN
L. SALMERÓN

MONOGRAFÍAS
DEL INSTITUTO DE MATEMÁTICAS
11

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Métodos diagramáticos en teoría de representaciones, C. Cibils, F. Larrión, L. Salmerón, Monografías del Instituto de Matemáticas 11 (1982) 111 p.

FE DE ERRATAS

Página 19, línea 4: Agregar al inciso (a):

"(Muestre primero que $f: M \twoheadrightarrow N$ es superfuo si y sólo si $L = M$ siempre que $L + \operatorname{Ker} f = M$, si y sólo si $\operatorname{Ker} f \subseteq \operatorname{rad} M$)".

Página 23, línea 5: Donde dice "morfismo de k-álgebras", debe decir "morfismo sobre de k-álgebras".

Página 28, línea 12: Donde dice "Sean $x_1,\ldots,x_r$ los ciclos...", no debe suponerse que r es finito.

Página 32: Suprímase el antepenúltimo párrafo, que comienza por "En general..."

METODOS DIAGRAMATICOS EN TEORIA DE REPRESENTACIONES

C. Cibils

F. Larrión

L. Salmerón

INDICE

INTRODUCCION

El objeto de esta monografía es poner al alcance del lector no especialista una serie de técnicas y resultados (los "métodos diagramáticos") pertenecientes ya al "folklore" de la Teoría de Representaciones de Algebras. A pesar de tratarse de conceptos y resultados de naturaleza elemental, son de difícil acceso a quien desea familiarizarse con ellos por encontrarse dispersos (y no siempre explícitos) en una gran variedad de artículos de investigación; es por esto que hemos creído conveniente la redacción de estas notas.

Quisiéramos puntualizar aquí que los métodos diagramáticos no son los únicos, ni los más empleados, ni los más importantes en Teoría de Representaciones: corresponden al caso menos general de que se ocupa la Teoría y, por su misma concreción, creemos que son los más asequibles a quien desea iniciarse en ella. Además, aparte de ser una herramienta útil, los métodos diagramáticos constituyen una de las más fecundas fuentes de ejemplos de que se dispone actualmente.

Tratando de que nuestras notas sean (casi) autocontenidas, y para fijar notación y terminología, hemos procurado reunir en el primer capítulo todo el material de la teoría general de álgebras y módulos que se necesita para el desarrollo de los siguientes capítulos. Aunque hemos dado casi todas las pruebas en el primer capítulo, suponemos que el lector tiene cierta familiaridad con los temas en él tratados.

En el segundo capítulo se estudian las álgebras de carcaj y los cocientes de éstas por ideales admisibles. Se hace énfasis, dentro de lo razonablemente posible, en el aspecto "visual" de la aritmética de estas álgebras.

En el capítulo tres asociamos un carcaj con relaciones a cada k-álgebra Λ de dimensión finita, donde k es un campo algebraicamente cerrado (primero sometemos a Λ a algunas restricciones que, como veremos, carecen de relevancia desde el punto de vista de la Teoría de Representaciones). Mostramos además que el estudio de las k-álgebras de dimensión finita es equivalente al de los carcajes con relaciones.

En el cuarto capítulo se lleva más adelante la equivalencia arriba mencionada: así como un álgebra Λ puede "visualizarse" como un carcaj con relaciones (C,R), también los Λ-módulos pueden "visualizarse" como representaciones de (C,R).

Aprovechando lo anterior, en el quinto capítulo "traducimos" algunos módulos importantes (proyectivos, inyectivos, simples) a representaciones del carcaj con relaciones asociado al álgebra.

En el capítulo seis se estudia el efecto que tiene sobre un carcaj con relaciones la imposición de que el cociente del álgebra de carcaj por el ideal de relaciones satisfaga condiciones adicionales. Desde luego, esto lo hacemos sólo en un pequeño número de casos particulares, pues no se dispone para ello de una teoría general.

En el apéndice hemos tratado, centrándonos en uno de los principales problemas de la Teoría de Representaciones, de dar (sin demostraciones) un panorama más amplio dentro del cual enmarcar los métodos diagramáticos.

Nos hemos apoyado fuertemente en los trabajos de W. H. Gustafson [Gs] y C. M. Ringel [Rn], que recomendamos a quien desee estudiar más a fondo los temas tratados en el apéndice. Hemos de advertir que poco o nada hemos dicho de otros importantes enfoques y técnicas (métodos matriciales, categóricos, topológicos,...) que se utilizan actualmente en Teoría de Representaciones: por el contrario, salvo en casos imposibles de dejar de lado por su importancia -a nuestro juicio- en la historia de nuestro tema de estudio, hemos procurado limitarnos a lo que tuviese relevancia inmediata para nuestro tema.

Al final de cada capítulo hemos incluído una corta lista de ejercicios. En su mayor parte, estos ejercicios son resultados que se usarán más adelante, y deberían considerarse como parte integrante del texto.

Quisiéramos hacer patente aquí nuestro agradecimiento a nuestros maestros Raymundo Bautista Ramos y Roberto Martínez Villa: no sólo aprendimos nuestro tema con ellos, también recibimos de ellos la ayuda y el estímulo necesarios para poder concluir estas notas. También agradecemos a los profesores de la Escuela de Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad Autónoma de Puebla, y a los alumnos del Seminario de Teoría de Representaciones de la Facultad de Ciencias de la U.N.A.M., que nos permitieron ensayar con ellos una versión

previa de estas notas: nos salvaron del error en más de una ocasión y solo será a pesar de ellos si persisten errores en la presente versión.

México, Otoño, 1981.

C. Cibils

F. Larrión

L. Salmerón

previa de estas notas: nos salvaron del error en más de una ocasión y solo será a pesar de ellos si persisten errores en la presente versión.

México, Otoño, 1981.

C. Cibils

F. Larrión

L. Salmerón

CAPITULO 1: PRELIMINARES

En este primer capítulo nos hemos esforzado por dar una presentación rápida y completa de resultados bien conocidos. Estos son indispensables para poder desarrollar los demás capítulos de este trabajo.

§1.1 ALGEBRAS Y MODULOS

Definición: Sea k un campo. Una k-álgebra es un anillo Λ (con uno) que posee estructura de k-espacio vectorial de tal forma que

$$\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$$

para cualesquiera $\alpha \in k$, $a \in \Lambda$, $b \in \Lambda$.

Diremos que Λ es una k-álgebra de dimensión finita si Λ es de dimensión finita como k-espacio vectorial.

Consideraremos siempre al campo k como un subanillo de Λ, mediante el monomorfismo de anillos:

$$\begin{aligned} k &\hookrightarrow \Lambda \\ \alpha &\longmapsto \alpha 1 \end{aligned}$$

Cada elemento de k conmuta entonces con todos los elementos de Λ:

$$(\alpha 1)a = \alpha(1a) = \alpha(a1) = a(\alpha 1)$$

Decimos que k actúa centralmente en Λ.

Ejemplos:

1.1.1: Sea $k[x_1,\ldots,x_r]$ el anillo de polinomios en r variables con coeficientes en k. Es también un k-espacio vectorial (de dimensión infinita) con acción central de k. Tiene por tanto estructura de k-álgebra.

1.1.2: $k\langle x_1,\ldots,x_r\rangle$ denotará el anillo de polinomios en r variables no conmutativas. Se trata también de una k-álgebra de dimensión infinita, llamada la k-álgebra asociativa libre en r generadores. Notemos que $k[x_1,\ldots,x_r]$ es el cociente de $k\langle x_1,\ldots,x_r\rangle$ por el ideal bilateral generado por $\{x_i x_j - x_j x_i \ / \ i,j = 1,\ldots,r\}$.

1.1.3: Dada una k-álgebra Λ, podemos construir su álgebra de matrices $M_n(\Lambda)$. Es el conjunto de todas las matrices nxn con entradas en Λ, que tiene estructura de k-álgebra (de dimensión finita si Λ es de dimensión finita) mediante la suma y multiplicación matriciales y la acción evidente de k. En la mayoría de los casos tomaremos $\Lambda = k$, el campo, o bien $\Lambda = D$, una k-álgebra con división (i.e. todo elemento no nulo de D es invertible).

1.1.4: Si G es un grupo finito, sea kG el k-espacio vectorial con base G. kG tiene un única estructura de k-álgebra (de dimensión finita $|G|$) tal que la multiplicación de los básicos coincide con la multiplicación en G.

Definición: Sean Λ y Λ' dos k-álgebras. Un morfismo de k-álgebras $\phi: \Lambda \longrightarrow \Lambda'$ es un morfismo de k-espacios vectoriales y de anillos simultáneamente.

Notación: ModΛ denotará la categoría de todos los módulos izquierdos sobre Λ. Notemos que cada M en ModΛ es, en particular, un k-espacio vectorial.

modΛ denotará la subcategoría plena de ModΛ constituída por los módulos finitamente generados. Es importante notar que si Λ es de dimensión finita, modΛ coincide con la subcategoría plena de ModΛ constituída por los módulos de k-dimensión finita.

§1.2 DESCOMPOSICION EN INESCINDIBLES

Definición: Diremos que un Λ-módulo M no nulo es inescindible si no tiene sumandos directos no triviales. Es decir que si

$$M \simeq U \oplus V,$$

entonces $U = 0$ o bien $V = 0$.

Los inescindibles juegan un papel clave en la Teoría de Representaciones de Algebras. En efecto, el objetivo principal es conocer y describir los módulos sobre un álgebra dada (antiguamente llamados representaciones). Ahora bien, el teorema siguiente nos asegura que podemos construir todos los módulos de modΛ si conocemos los inescindibles. Toda información sobre ellos resulta pues fundamental, desde saber si hay o no un número finito de tipos (i.e. clases de isomorfía) hasta dar una lista completa de ellos.

1.2.1 Teorema (Krull-Schmidt): *Sea Λ una k-álgebra de dimen-*

sión finita. Entonces todo módulo M *en* modΛ *tiene una única descomposición en suma directa de un número finito de módulos inescindibles en* modΛ.

Es decir que:

$$M \cong M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_r$$

donde los M_i*'s son inescindibles, y si tenemos otra descomposición* $M \cong N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_s$ *(*N_i *inescindibles) entonces* $r = s$ *y existe una permutación de índices* σ *tal que* $M_i \cong N_{\sigma(i)}$ *para cada* i.

Una demostración del teorema anterior puede verse en (14.2) y (14.5) de [C-R], pp. 81-83.

Notemos que el álgebra Λ puede ser vista como un objeto de modΛ gracias a la multiplicación del anillo. De esta forma, Λ tiene una única descomposición en inescindibles de modΛ:

$$\Lambda \cong P_1 \oplus P_2 \oplus \dots \oplus P_n$$

Recordemos que un Λ-módulo P es proyectivo si y sólo si es sumando directo de algún Λ-módulo libre (es decir de un Λ-módulo isomorfo a una suma de copias del Λ-módulo Λ).

Se ve entonces que cada uno de los P_i que aparece en la descomposición de Λ es un módulo proyectivo inescindible.

El hecho es que allí se encuentran todos, en el sentido de que cualquier proyectivo inescindible P en modΛ es isomorfo a algún P_i. En efecto, tenemos que

$$P \oplus M \cong \bigoplus_1^m \Lambda,$$

y descomponiendo M obtenemos una descomposición de $\overset{m}{\underset{1}{\oplus}}\Lambda$ en inescindibles. Pero ya teníamos una descomposición:

$$\overset{m}{\underset{1}{\oplus}}\Lambda = \overset{m}{\underset{1}{\oplus}} P_1 \oplus \overset{m}{\underset{1}{\oplus}} P_2 \oplus \ldots \oplus \overset{m}{\underset{1}{\oplus}} P_n.$$

Por el teorema de Krull-Schmidt, P es isomorfo, obligatoriamente, a algún P_i.

<u>Definición</u>: Una k-álgebra Λ de dimensión finita es <u>básica</u> si los proyectivos inescindibles que aparecen en su descomposición "no se repiten". Es decir que $P_i \simeq P_j$ sólo si $i = j$.

<u>1.2.2</u> <u>Teorema</u> ([A-F], (27.14), p. 309): *Para toda* k-*álgebra* Λ *de dimensión finita, existe una única (hasta isomorfía)* k-*ál<u>gebra</u>* Λ' *de dimensión finita y básica tal que* modΛ *y* modΛ' *son categorías equivalentes.* (En este caso decimos que Λ y Λ' son <u>Morita equivalentes</u>).

Como ya los señalamos anteriormente, nuestros esfuerzos estan dirigidos a conocer y describir las álgebras de dimensión finita y sus categorías de módulos finitamente generados. Desde este punto de vista, y gracias al teorema anterior, no se pierde ninguna generalidad al considerar solamente k-álgebras básicas; además, dada una k-álgebra básica de dimensión finita es fácil construir todas las k-álgebras que le son Morita-equivalentes.

<u>1.2.3</u> <u>Proposición</u>: *Sea* Λ *una* k-*álgebra de dimensión finita y*

$$\Lambda = P_1 \oplus P_2 \oplus \ldots \oplus P_n$$

su descomposición en proyectivos inescindibles.

Descompongamos, en esta suma directa, el uno de Λ:

$$1 = e_1 + e_2 + \ldots + e_n.$$

Entonces $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *es un sistema*

<u>completo</u> $(\sum_{i=1}^{n} e_i = 1)$ *de*

<u>idempotentes</u> $(e_i^2 = e_i)$

<u>ortogonales</u> $(e_i e_j = 0$ si $i \neq j)$ *y*

<u>primitivos</u> (*si* $e_i = f+g$ *con* f *y* g *idempotentes ortogonales, entonces* $f = 0$ *o bien* $g = 0$).

<u>Demostración</u>: En efecto, tenemos que $e_i = e_i 1$, de donde:

$$e_i = e_i e_1 + e_i e_2 + \ldots + e_i e_n.$$

El primer miembro es un elemento de P_i, mientras que el segundo tiene su primer sumando en P_1, el segundo en P_2, etc. Entonces $e_i^2 = e_i$ y $e_i e_j = 0$ si $i \neq j$.

Mostremos ahora que $\Lambda e_i = P_i$. En efecto, ya sabemos que $\Lambda e_i \subseteq P_i$. Sea entonces $x \in P_i$. Tenemos que $x = x1 = xe_1 + \ldots + xe_n$ y esta es una descomposición de x en la suma directa. Entonces $xe_j = 0$ si $j \neq i$ y $x = xe_i \in \Lambda e_i$.

Ahora podemos mostrar que cada e_i es primitivo: si $e_i = f+g$ con f y g idempotentes ortogonales, es fácil ver que $\Lambda e_i = \Lambda f \oplus \Lambda g$, y como $\Lambda e_i = P_i$ es inescindible, obtenemos $\Lambda f = 0$ o bien $\Lambda g = 0$, es decir $f = 0$ o $g = 0$. //

<u>1.2.4</u> <u>Proposición</u>: *Sea* $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *un sistema completo de idempotentes ortogonales primitivos* (*desde luego,* $e_i \neq 0$ *para toda* i).

Entonces $\Lambda = \Lambda e_1 \oplus \Lambda e_2 \oplus \ldots \oplus \Lambda e_n$ *es una descomposi-*

ción en inescindibles.

<u>Demostración</u>: Tenemos que $\Lambda = \Lambda e_1 + \Lambda e_2 + \ldots + \Lambda e_n$ por tratarse de un sistema completo. La suma es directa ya que los idempotentes son ortogonales. Cada sumando es inescindible puesto que cada e_i es primitivo. //

Daremos ahora una proposición que caracteriza los módulos inescindibles.

<u>1.2.5</u> <u>Proposición</u>: *Sea Λ una k-álgebra y M un módulo en* ModΛ. *Entonces M es inescindible si y sólo si la k-álgebra* $\mathrm{End}_\Lambda M$ *tiene como únicos idempotentes a 0 y 1.*

<u>Demostración</u>: Si $e \in \mathrm{End}_\Lambda M$ es un idempotente, entonces

$$M = \mathrm{Im}e \oplus \mathrm{Im}(1-e),$$

de donde e es cero o uno.

Recíprocamente, si $M = U \oplus V$, $e: U \oplus V \longrightarrow M$ definido por $e(u+v) = u$ es un idempotente. Entonces $e = 0$ o bien $e = 1$ ($U = 0$ ó $V = 0$), de donde M resulta inescindible. //

<u>1.2.6</u> <u>Lema</u>:

(i).- *Sea M un Λ-módulo y e un idempotente de Λ. Entonces* $f \longmapsto f(e)$ *define un isomorfismo* $\phi: \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda e, M) \longrightarrow eM$ *de k-espacios vectoriales.*

(ii).- $\phi: \mathrm{End}_\Lambda(\Lambda e) \simeq e\Lambda e$, *el isomorfismo siendo aquí de k-álgebras. (Es inmediata la verificación de que $e\Lambda e$ tiene estructura de k-álgebra, el uno es e).* //

La demostración del lema anterior es una verificación sencilla y se deja al lector como ejercicio. Tal será el significado, de aquí en adelante, del símbolo // después de un enunciado.

1.2.7 Corolario: *Sea e un idempotente de Λ. Entonces e es primitivo si y sólo si eΛe tiene como únicos idempotentes a e y 0.* //

§1.3 ALGEBRAS INDESCOMPONIBLES

Recordemos que dadas dos k-álgebras Λ_1 y Λ_2, la suma directa $\Lambda_1 \dot{+} \Lambda_2$ es la k-álgebra obtenida mediante la suma directa de los espacios vectoriales con la multiplicación componente a componente, es decir:

$$(\lambda_1,\lambda_2)\cdot(\lambda_1',\lambda_2') = (\lambda_1\lambda_1',\lambda_2\lambda_2').$$

Definición: Una k-álgebra es indescomponible (o inescindible como k-álgebra) si no es suma directa de dos k-álgebras.

1.3.1 Proposición: *Toda k-álgebra de dimensión finita es isomorfa a una suma directa de un número finito de k-álgebras indescomponibles de dimensión finita.* //

Recordemos que nuestro interés se centra en las propiedades categóricas de modΛ. Ya hemos visto que podemos restringirnos a álgebras básicas de dimensión finita. También po dremos restringirnos a álgebras indescomponibles en virtud del siguiente resultado:

<u>1.3.2</u> <u>Proposición</u>: *Si* $\Lambda \simeq \dot{\coprod}_{i=1}^{n} \Lambda_i$, *entonces* $\mathrm{mod}\Lambda \simeq \mathop{\mathsf{X}}_{i=1}^{n} \mathrm{mod}\Lambda_i$ *(el producto cartesiano de las categorías* $\mathrm{mod}\Lambda_i$, $i = 1,\dots,n$). //

El siguiente resultado caracteriza las álgebras indes componibles:

<u>1.3.3</u> <u>Proposición</u>: *Sea* Λ *una* k-*álgebra.* Λ *es indescomponible si y sólo si los únicos idempotentes centrales son* 0 *y* 1.
<u>Demostración</u>: Sea e un idempotente central (i.e. $e^2 = e$ y $ex = xe$ para toda $x \in \Lambda$). Es fácil comprobar que $\Lambda = \Lambda e \dotplus \Lambda(1-e)$. Entonces, si Λ es indescomponible, $e = 0$ o $e = 1$.

Recíprocamente, si $\Lambda = \Lambda_1 \dotplus \Lambda_2$, decompongamos el 1 de Λ, $1 = f+g$. Es fácil verificar que f y g son idempotentes centrales (además son ortogonales) y que $\Lambda f = \Lambda_1$, $\Lambda g = \Lambda_2$. Entonces $f = 1$ o $g = 1$, de donde $\Lambda_1 = \Lambda$ o $\Lambda_2 = \Lambda$. //

<u>§1.4</u> <u>EL RADICAL DE UN ALGEBRA</u>

Por lo que resta del capítulo, todas la k-álgebras consideradas son de dimensión finita.

Recordemos que si Λ es una k-álgebra e I,J son ideales izquierdos de Λ,

$$IJ = \{\Sigma x_i y_i \ / \ x_i \in I, y_i \in J\}, \text{ e}$$

$$I + J = \{x+y \;/\; x \in I, y \in J\}$$

son los ideales izquierdos producto y suma de I y J respectivamente.

<u>Definición</u>: Un ideal izquierdo I es <u>nilpotente</u> si $I^n = 0$ para algún número natural n.

Nótese que I es nilpotente si y sólo si cada producto de n elementos de I vale cero (para algún natural n).

<u>1.4.1</u> <u>Proposición</u>: *Toda k-álgebra Λ de dimensión finita posee un ideal izquierdo nilpotente que contiene a todos los ideales izquierdos nilpotentes. Este ideal es, por tanto, único y lo llamaremos el <u>radical</u> de Λ (radΛ).*

Además, radΛ es un ideal bilateral.

<u>Demostración</u>: Sea J un ideal izquierdo nilpotente de k-dimensión máxima.

Supongamos que existe un ideal izquierdo nilpotente I tal que $I \not\subset J$. Entonces $J \subsetneq I + J$, de donde $\dim J < \dim(I+J)$, lo que resulta ser una contradicción puesto que I+J es nilpotente, como lo afirma el siguiente lema:

<u>Lema</u>: *Si I,J son ideales izquierdos nilpotentes, I+J también lo es.*

<u>Demostración</u>: Digamos que $I^n = 0$ y $J^m = 0$. Consideremos un producto de n+m elementos de I+J:

$$(x_1+y_1)(x_2+y_2)\ldots(x_{n+m}+y_{n+m}).$$

Desarrollando este producto, cada sumando tendrá: o bien a lo menos n factores en I (y por lo tanto está en I^n) o bien a lo menos m factores en J (y por lo tanto está en J^m). En ambos casos el sumando es cero. //

Para finalizar la prueba de 1.4.1, veamos ahora que $J = \mathrm{rad}\Lambda$ resulta también ideal derecho. Debemos probar que $(\mathrm{rad}\Lambda)\Lambda \subseteq \mathrm{rad}\Lambda$, para lo cual basta mostrar que el ideal izquierdo $(\mathrm{rad}\Lambda)\Lambda$ es nilpotente.

$$((\mathrm{rad}\Lambda)\Lambda)^n = (\mathrm{rad}\Lambda)\Lambda(\mathrm{rad}\Lambda)\Lambda\ldots(\mathrm{rad}\Lambda)\Lambda,$$

pero $\Lambda(\mathrm{rad}\Lambda) \subseteq \mathrm{rad}\Lambda$, de donde $((\mathrm{rad}\Lambda)\Lambda)^n \subseteq (\mathrm{rad}\Lambda)^n = 0$. Esto termina la prueba de nuestra proposición. //

Pasaremos ahora a estudiar las álgebras cuyo radical es cero, que como veremos más adelante, poseen propiedades características.

<u>1.4.2</u> <u>Proposición</u>: *Sea Λ una k-álgebra de dimensión finita. Entonces $\Lambda/\mathrm{rad}\Lambda$ es una k-álgebra de radical cero.*

<u>Demostración</u>: Sea $\pi: \Lambda \longrightarrow \Lambda/\mathrm{rad}\Lambda$ la proyección canónica. Sea I un ideal izquierdo nilpotente ($I^n = 0$) de $\Lambda/\mathrm{rad}\Lambda$. Veremos que $I = 0$.

$\pi^{-1}(I)$ es un ideal izquierdo de Λ y, de hecho, nilpotente: en efecto, consideremos $y_1 y_2 \ldots y_n$ un producto de n elementos en $\pi^{-1}(I)$. Tenemos que $\pi(y_1 y_2 \ldots y_n) = 0$, o sea que $y_1 y_2 \ldots y_n \in \mathrm{rad}\Lambda$. Pero $\mathrm{rad}^m\Lambda = 0$ para alguna m, y de aquí podemos ver que todo producto de mn elementos de $\pi^{-1}(I)$ vale cero. Entonces $\pi^{-1}(I) \subseteq \mathrm{rad}\Lambda$, de donde $I = 0$. //

<u>1.4.3</u> <u>Proposición</u>: radΛ *es el mínimo ideal bilateral* I *tal que al dividir por* I *se obtiene un álgebra de radical cero. En otras palabras, si* J *es ideal bilateral y* Λ/J *es de radical cero, entonces* rad$\Lambda \subseteq J$.

<u>Demostración</u>: Sea $\pi: \Lambda \longrightarrow \Lambda/J$ la proyección canónica. Entonces $\pi(\text{rad}\Lambda)$ es un ideal nilpotente de Λ/J y entonces $\pi(\text{rad}\Lambda) = 0$, de donde rad$\Lambda \subseteq J$. //

La conversa también es cierta: si J es un ideal bilateral que contiene al radical, entonces Λ/J es de radical cero. Esto no lo utilizaremos nosotros pero una prueba fácil se sigue del Teorema de Wedderburn, que enunciaremos más adelante.

<u>1.4.4</u> <u>Proposición</u>: *Sea* Λ *una* k-*álgebra de dimensión finita. Entonces* radΛ *coincide con la intersección de todos los ideales izquierdos (o todos los derechos) máximos.*

<u>Demostración</u>: Sea M un ideal izquierdo máximo, veremos que rad$\Lambda \subseteq M$. Supongamos que rad$\Lambda \not\subseteq M$. Entonces $M \subsetneq \text{rad}\Lambda + M$, por lo que rad$\Lambda + M = \Lambda$. Entonces $1 = x+a$ con ciertos $x \in \text{rad}\Lambda$ y $a \in M$. Pero sabemos que x es nilpotente (digamos $x^{n+1} = 0$). Tenemos que

$$(1-x)(1+x+\ldots+x^n) = 1,$$

de donde $1-x$ es invertible. Pero $1-x = a \in M$, lo cual querría decir que $M = \Lambda$, pero esto es absurdo.

Para mostrar la otra contención, es necesario introducir más herramienta que, de todas formas, será utilizada mas adelante.

1.4.5 Lema de Nakayama: *Sea J un ideal izquierdo contenido en la intersección de todos los ideales máximos. Sea N un Λ-módulo finitamente generado y supongamos que JN = N. Entonces* N = 0.

Demostración: Supongamos que N ≠ 0. Para efectos de la prueba podemos suponer que J es bilateral. Consideremos entonces un sistema de generadores $\{w_1,\ldots,w_n\}$ del Λ-módulo N, de cardinalidad mínima.

Como JN = N, podemos escribir: $w_1 = a_1w_1+\ldots+a_nw_n$ con $a_i \in J$, de donde $(1-a_1)w_1 = a_2w_2+\ldots+a_nw_n$.

Si $1-a_1$ no es invertible, siempre existe un máximo M que lo contiene, pero siendo a_1 elemento de J, está en todos los máximos, en particular en M. Entonces $1 \in M$, lo cual es absurdo. Por tanto $1-a_1$ es invertible y w_1 se expresa como combinación lineal de $w_2,w_3,\ldots,w_n$ que son, entonces un sistema de generadores de N. Esto es absurdo pues n era mínimo.//

Probemos ahora la otra contención que nos faltaba para probar 1.4.4.

Llamemos E a la intersección de todos los ideales izquierdos máximos.

Consideremos la siguiente cadena de ideales izquierdos de Λ :

$$E \supseteq E^2 \supseteq E^3 \supseteq \ldots E^n \supseteq E^{n+1} \supseteq \ldots$$

Por razones de dimensión, existe un r tal que

$E^r = E^{r+1}$. Aplicando el Lema de Nakayama a E^r tenemos que $E^r = 0$, o sea que E es nilpotente y se encuentra por tanto contenido en radA.

Con esto queda demostrada la proposición 1.4.4, si observamos que todo lo hecho es igualmente válido para ideales derechos. //

Definición: Una k-álgebra A es simple si no tiene ideales bilaterales, salvo el 0 y A.

1.4.6 Teorema de Wedderburn-Artin, Parte I (13.6 de [A-F], p.154): *Toda k-álgebra de dimensión finita con radical cero es isomorfa a una suma directa de k-álgebras simples.* //

Notemos que la conversa (toda álgebra que es suma directa de k-álgebras simples tiene radical cero) es claramente cierta.

Tales álgebras se llamarán semisimples.

1.4.7 Teorema de Wedderburn-Artin, Parte II (13.4 de [A-F], p. 152): *Toda k-álgebra de dimensión finita simple es isomorfa a un álgebra de matrices con entradas en un anillo con división D. Además, D resulta contener centralmente a k y ser de k-dimensión finita. (ver ejemplo 1.1.3).* //

Los módulos sobre las álgebras semisimples tienen propiedades características bien conocidas (ver [J1],cap. 2).

Todos los módulos proyectivos inescindibles son simples (i.e. no tienen submódulos propios). De esto se deduce que todo módulo en ModΛ es una suma directa (posiblemente infinita) de simples. Además esto sucede solamente cuando el álgebra es semisimple.

Probaremos ahora un resultado que será de utilidad en el capítulo 3.

1.4.8 Proposición: *Si k es algebraicamente cerrado, toda k-álgebra con división D de dimensión finita coincide con k.*

Demostración: Sea $d \in D$. Digamos que $\dim_k D = n$ y consideremos los elementos $1, d, d^2, \ldots, d^n$. Deben ser linealmente dependientes:

$$a_0 + a_1 d + a_2 d^2 + \ldots + a_n d^n = 0$$

donde los a_i pertenecen a k y no son todos cero.

Consideremos el polinomio $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$. Como k es algebraicamente cerrado, puede factorizarse como

$$a_n (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n), \text{ con } \alpha_i \in k.$$

Pero como k es central en D:

$$a_n (d-\alpha_1)(d-\alpha_2)\ldots(d-\alpha_n) = a_0 + a_1 d + a_2 d^2 + \ldots + a_n d^n = 0,$$

de donde algún $d-\alpha_i$ es cero y por tanto d está en k. //

1.4.9 Corolario: *Si k es algebraicamente cerrado, las k-álgebras de dimensión finita simples no son más que las álgebras de matrices con entradas en k.* //

§1.5 EL RADICAL DE UN MODULO

Definición: El radical de un Λ-módulo M es el submódulo radM obtenido al intersectar todos los submódulos máximos de M.

Definición: Un Λ-módulo $S \neq 0$ es simple si no tiene submódulos distintos de 0 y S (Claramente todo simple es inescindible. La conversa sólo vale si el álgebra es semisimple). Un Λ-módulo es semisimple si es isomorfo a una suma directa de módulos simples.

1.5.1 Lema:

Parte 1: *Sean* M *y* N *dos* Λ-*módulos y* $f: M \longrightarrow N$ *un morfismo. Entonces* $f(\mathrm{radM}) \subseteq \mathrm{radN}$.

Parte 2: *Si* f *es un epimorfismo y* $\mathrm{Kerf} \subseteq \mathrm{radM}$, *entonces* $f(\mathrm{radM}) = \mathrm{radN}$.

Demostración:

Parte 1: Sea $\mathcal{M}$ un submódulo máximo de N y veamos que $f(\mathrm{radM}) \subseteq \mathcal{M}$. Para ello consideremos $\pi: N \longrightarrow N/\mathcal{M}$ la proyección canónica y mostremos que $\pi f(\mathrm{radM}) = 0$.

Ahora bien, es claro que $\mathcal{M}$ es submódulo máximo de N si y sólo si $N/\mathcal{M}$ es simple, y como $\mathrm{Im}(\pi f)$ es un submódulo, es cero o es todo $N/\mathcal{M}$.

En el primer caso, ya hemos terminado.

En el segundo, πf es epimorfismo, entonces $M/\mathrm{Ker}(\pi f)$ es isomorfo a $N/\mathcal{M}$ y por tanto simple, de donde $\mathrm{Ker}(\pi f)$ es máximo en M y radM está contenido en $\mathrm{Ker}(\pi f)$.

Parte 2: El resultado se sigue del hecho de que $M' \longmapsto fM'$ establece una biyección que respeta las inclusiones entre los submódulos M' de M que contienen a $\mathrm{Ker}f$ y los submódulos de N (Esto ha sido usado ya en la parte 1).//

1.5.2 Proposición: $\mathrm{rad}(M/\mathrm{rad}M) = 0$.

Demostración: Se sigue de la parte 2 del lema anterior, considerando la proyección canónica $\pi: M \longrightarrow M/\mathrm{rad}M$. //

1.5.3 Proposición: $\mathrm{rad}(M_1 \oplus M_2) = \mathrm{rad}M_1 \oplus \mathrm{rad}M_2$.

Demostración: Consideremos las dos inclusiones canónicas y apliquemos la parte 1 de 1.5.1. Para la otra contención, basta hacer lo mismo con las dos proyecciones canónicas.

Lo mismo es aún válido para sumas directas infinitas.//

1.5.4 Lema: *Sea* S *un* Λ*-módulo simple. Entonces* $(\mathrm{rad}\Lambda)S = 0$.

Demostración: Aplíquese el Lema de Nakayama, 1.4.5. //

Observación: Sea I un ideal bilateral de Λ y M un Λ-módulo tal que $IM = 0$. Entonces M tiene estructura de Λ/I-módulo y todos los Λ-submódulos de M son Λ/I-submódulos. En particular, por el lema anterior, un Λ-módulo es simple si y sólo si lo es como $\Lambda/\mathrm{rad}\Lambda$-módulo.

1.5.5 Teorema: *Si* M *es* Λ*-módulo,* $\mathrm{rad}M = (\mathrm{rad}\Lambda)M$.

Demostración: Ya sabemos que $M/\mathrm{rad}M$ tiene radical cero. Consideremos ahora el morfismo inducido por las proyecciones canónicas de M/radM al cociente de éste por cada submódulo máximo. Es decir:

$$M/\mathrm{rad}M \longrightarrow \prod_{M}(M/\mathrm{rad}M)/M.$$

El núcleo de este morfismo es precisamente rad(M/radM) que vale cero. M/radM se sumerge en el producto y entonces

$$(\mathrm{rad}\Lambda)(M/\mathrm{rad}M) \subseteq (\mathrm{rad}\Lambda)\prod_{M}(M/\mathrm{rad}M)/M.$$

Pero cada $(M/\mathrm{rad}M)/M$ es simple y por lo tanto anulado por radΛ. Por tanto $(\mathrm{rad}\Lambda)(M/\mathrm{rad}M) = 0$, o sea que $(\mathrm{rad}\Lambda)M \subseteq \mathrm{rad}M$.

Para la otra contención, notemos que $M/(\mathrm{rad}\Lambda)M$ es un $\Lambda/\mathrm{rad}\Lambda$-módulo. Pero $\Lambda/\mathrm{rad}\Lambda$ es un álgebra semisimple y por tanto todos sus módulos son semisimples, de donde $M/(\mathrm{rad}\Lambda)M$ es semisimple como Λ-módulo y su radical es cero.

Consideremos la proyección $f\colon M \longrightarrow M/(\mathrm{rad}\Lambda)M$ que, gracias a la contención ya mostrada, cumple con las hipótesis de la parte 2 de 1.5.1. Obtenemos:

$$f(\mathrm{rad}M) = \mathrm{rad}(M/(\mathrm{rad}\Lambda)M) = 0,$$

de donde $\mathrm{rad}M \subseteq \mathrm{Ker}f = (\mathrm{rad}\Lambda)M$. //

<u>1.5.6</u> <u>Corolario</u>: *Sea M un Λ-módulo. Si radM = 0, entonces M es semisimple. La conversa se sigue de 1.5.4 y ya fue utilizada en la prueba anterior.* //

<u>§1.6</u> <u>CUBIERTAS PROYECTIVAS</u>

<u>Definición</u>: Sean M y N en ModΛ. Un epimorfismo $f\colon M \longrightarrow N$ es <u>superfluo</u> si, cada vez que fg sea epimorfismo para algún

$g: X \longrightarrow M$, g es epimorfismo.

Para familiarizarse con este concepto, sugerimos al lector probar que:

(a) *Suma directa de morfismos superfluos es superflua.*

(b) *Si* $f: M \twoheadrightarrow N$ *y* $g: N \twoheadrightarrow T$ *son dos morfismos cuya composición* gf *es superflua, entonces* f *es superflua.*

La siguiente es una reformulación del Lema de Nakayama 1.4.5.

<u>1.6.1</u> <u>Lema de Nakayama</u>: *Sea* I *un ideal izquierdo de* Λ*, con* $I \subseteq \mathrm{rad}\Lambda$. *Entonces* $f: M \twoheadrightarrow M/IM$ *es un morfismo superfluo.*

<u>Demostración</u>: Sea $g: X \longrightarrow M$ y supongamos que fg es epi. Para mostrar que f es superfluo, debemos mostrar que g es epi, o sea que $\mathrm{Im}g = M$.

Consideremos $M/\mathrm{Im}g$. Probaremos que $I(M/\mathrm{Im}g) = M/\mathrm{Im}g$, de donde será $M/\mathrm{Im}g = 0$ por 1.4.5.

Sabemos que $I(M/\mathrm{Im}g) = (IM + \mathrm{Im}g)/\mathrm{Im}g$. Ahora bien, la restricción de f a $\mathrm{Im}g$ es epi, de donde $\mathrm{Im}g + IM = M$ y por tanto queda probado el lema. //

<u>Definición</u>: Sea M en $\mathrm{mod}\Lambda$. Entonces $\phi: P \twoheadrightarrow M$ en $\mathrm{mod}\Lambda$ es una <u>cubierta proyectiva</u> si P es proyectivo y ϕ es superfluo.

<u>1.6.2</u> La prueba de la unicidad de esta cubierta (en caso

de existir) es inmediata: sea $\psi: Q \twoheadrightarrow M$ otro epi superfluo. Por ser Q proyectivo, existe $\alpha: Q \longrightarrow P$ tal que $\phi\alpha = \psi$, por tanto α es epi. Similarmente obtenemos $\beta: P \longrightarrow Q$ epi, de donde α es isomorfismo.

La existencia de cubierta proyectiva para todo M en modΛ será consecuencia de los resultados de la próxima sección.

§1.7 PROYECTIVOS Y SIMPLES

1.7.1 Proposición (27.1 y 27.4 de [A-F], p. 301): *Sea Λ una k-álgebra de dimensión finita. Todo idempotente* x *de* $\Lambda/\text{rad}\Lambda$ *se levanta, es decir que existe un idempotente* e *de* Λ *tal que* $\bar{e} = x$.

Más aún, todo sistema completo de idempotentes primitivos ortogonales de $\Lambda/\text{rad}\Lambda$ *se levanta a uno con las mismas propiedades.* //

1.7.2 Proposición: *Sea Λ una k-álgebra de dimensión finita y* $\{e_1,\ldots,e_n\}$ *un sistema completo de idempotentes primitivos ortogonales. Sabemos ya que* $\{\Lambda e_1,\ldots,\Lambda e_n\}$ *es una lista completa de representantes de las clases de isomorfía de módulos proyectivos inescindibles (nótese que en esta lista hay repeticiones si el álgebra no es básica). Se afirma que*

$$\{\Lambda e_1/\text{rad}\Lambda e_1, \Lambda e_2/\text{rad}\Lambda e_2, \ldots, \Lambda e_n/\text{rad}\Lambda e_n\}$$

es una lista completa de representantes de las clases de iso-

morfía de los módulos simples en modΛ.

Además $\Lambda e_i/\mathrm{rad}\Lambda e_i \cong \Lambda e_j/\mathrm{rad}\Lambda e_j$ *si y sólo si* $\Lambda e_i \cong \Lambda e_j$.

Demostración:

1) Cada $\Lambda e_i/\mathrm{rad}\Lambda e_i$ es simple.

$\Lambda e_i/\mathrm{rad}\Lambda e_i$ es un $\Lambda/\mathrm{rad}\Lambda$-módulo y por tanto semisimple. Por otro lado es fácil verificar que teniendo $\Lambda = \Lambda e_1 \oplus \Lambda e_2 \oplus \dots$ $\dots \oplus \Lambda e_n$, se obtiene:

(*): $\Lambda/\mathrm{rad}\Lambda = \Lambda e_1/\mathrm{rad}\Lambda e_1 \oplus \Lambda e_2/\mathrm{rad}\Lambda e_2 \oplus \dots \oplus \Lambda e_n/\mathrm{rad}\Lambda e_n$.

Si algún sumando de $\Lambda/\mathrm{rad}\Lambda$ en la descomposición anterior no fuera simple, obtendríamos un sistema completo de idempotentes primitivos ortogonales con más de n elementos que podríamos levantar a Λ por 1.7.1. Esto es una contradicción.

2) Todo Λ-módulo simple es isomorfo a algún $\Lambda e_i/\mathrm{rad}\Lambda e_i$.

En efecto, tenemos la descomposición (*). Sabemos que allí aparecen todos los proyectivos inescindibles de $\Lambda/\mathrm{rad}\Lambda$. Pero $\Lambda/\mathrm{rad}\Lambda$ es semisimple: todos sus módulos son semisimples y proyectivos, de donde se deduce que, sobre $\Lambda/\mathrm{rad}\Lambda$, los proyectivos inescindibles coinciden con los simples. Pero estos son los Λ-módulos simples, como vimos en la sección 1.5.

3) Si $\Lambda e_i/\mathrm{rad}\Lambda e_i \cong \Lambda e_j/\mathrm{rad}\Lambda e_j$, entonces $\Lambda e_i \cong \Lambda e_j$.

En efecto, como Λe_i es proyectivo y al dividir por $\mathrm{rad}\Lambda e_i$ se obtiene un morfismo superfluo (Lema de Nakayama), la unicidad de la cubierta proyectiva nos proporciona el resultado. //

1.7.3 Corolario: *Todo módulo en* modΛ *tiene cubierta proyectiva.*

Demostración: Consideremos la proyección canónica $\pi: M \rightarrow M/\mathrm{rad}M$, que sabemos que es superflua por el Lema de Nakayama. Por otro lado, $M/\mathrm{rad}M$ es semisimple. Cada sumando simple tiene cubierta proyectiva por lo anterior, y por tanto $M/\mathrm{rad}M$ tiene cubierta proyectiva por 1.6(a). Supongamos que $f: P \twoheadrightarrow M/\mathrm{rad}M$ es la cubierta proyectiva. Como P es proyectivo, existe $\phi: P \longrightarrow M$ tal que $\pi\phi = f$. Por tanto ϕ es epi, ya que f es superfluo. Además, 1.6(b) prueba que ϕ es superfluo. //

EJERCICIOS DEL CAPITULO 1

Sea Λ una k-álgebra de dimensión finita.

1.A Si $e \in \Lambda$ es idempotente, entonces $\mathrm{rad}(e\Lambda e) = e(\mathrm{rad}\Lambda)e = e\Lambda e \cap \mathrm{rad}\Lambda$.

1.B Si $\phi: \Lambda \longrightarrow \Lambda'$ es un morfismo de k-álgebras, $\phi(\mathrm{rad}\Lambda) \subseteq \mathrm{rad}\Lambda'$.

1.C Si $\phi: \Lambda \longrightarrow \Lambda'$ es un morfismo sobre de k-álgebras, las siguientes afirmaciones son equivalentes (donde $t \geq 1$):

(a) $\mathrm{Ker}\phi \subseteq \mathrm{rad}^t\Lambda$

(b) $\phi^{-1}(\mathrm{rad}^t\Lambda') = \mathrm{rad}^t\Lambda$ (en particular, $\phi(\mathrm{rad}^t\Lambda) = \mathrm{rad}^t\Lambda'$).

(c) ϕ induce un isomorfismo $\bar{\phi}: \Lambda/\mathrm{rad}^t\Lambda \longrightarrow \Lambda'/\mathrm{rad}^t\Lambda'$.

1.D Si $\phi: \Lambda \longrightarrow \Lambda'$ es un morfismo sobre de k-álgebras con $\mathrm{Ker}\phi \subseteq \mathrm{rad}\Lambda$, y $\{e_1,\dots,e_n\}$ es un sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos (no nulos) entonces $\{\phi(e_1),\dots,\phi(e_n)\}$ también lo es.

1.E Sea Λ^{op} el <u>álgebra opuesta</u> de Λ: el mismo k-espacio vectorial, pero con la nueva multiplicación $\lambda * \mu := \mu\lambda$. Entonces $(\Lambda^{op})^{op} = \Lambda$ y, claramente, Λ^{op} es también una k-álgebra de dimensión finita. Muestre que:

(1) Hay una dualidad $D: \text{mod}\Lambda \longrightarrow \text{mod}\Lambda^{op}$, o sea un funtor contravariante D tal que existe otro funtor contravariante $E: \text{mod}\Lambda^{op} \longrightarrow \text{mod}\Lambda$ tal que $DE \simeq 1_{\text{mod}\Lambda^{op}}$ y $ED \simeq 1_{\text{mod}\Lambda}$. Sugerencia: $D(X) := \text{Hom}_k(X,k)$.

(2) Λ es indescomponible si y sólo si Λ^{op} lo es.

(3) Λ es básica si y sólo si Λ^{op} lo es ([A-F], p. 102, 2.3).

(4) Si Λ es básica y $\Lambda = P_1 \oplus P_2 \oplus \ldots \oplus P_n$ es descomposición en inescindibles, $D(P_1), \ldots, D(P_n)$ es una lista completa y sin repeticiones de los inyectivos inescindibles de $\text{mod}\Lambda^{op}$.

CAPITULO 2: EL ALGEBRA DE CARCAJ

En este capítulo definiremos lo que es un carcaj y su álgebra asociada. Ellos constituyen una buena herramienta para el estudio de las álgebras en general, como se podrá apreciar en los siguientes capítulos.

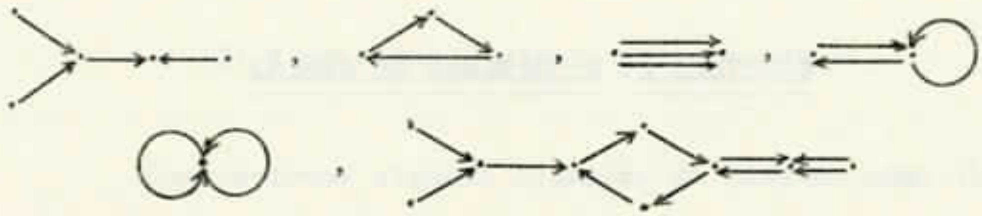
Daremos luego una reseña de propiedades con el propósito de familiarizarnos con el álgebra de carcaj y su aritmética.

Para terminar, haremos algo similar para los cocientes de las álgebras de carcaj que se obtienen al dividir por ciertos ideales que hemos llamado admisibles.

§2.1 CARCAJES Y ALGEBRAS DE CARCAJ

Definición: Un carcaj C es una gráfica orientada, conexa y finita. Más precisamente, un carcaj consiste de un conjunto C_0 de "vértices" y otro C_1 de "flechas", junto con una asignación que a cada flecha de C_1 le asocia su vértice inicial y su vértice final. Pedimos que C_0 y C_1 sean finitos, y que C sea conexo. Nótese que no se excluyen los casos en que aparecen lazos o aristas múltiples.

Son ejemplos de carcajes:



Notación: α: $i \longrightarrow j$ en C significará "la flecha α se inicia en el vértice i y termina en el vértice j".

Definición: Un camino dirigido (de longitud n) de i a j en un carcaj C es una sucesión de vértices y flechas $(j/\alpha_n, \dots, \alpha_1/i)$ con $n \geq 0$, verificando que

$$\begin{aligned} &\text{inicio de } \alpha_1 = i \\ &\text{final de } \alpha_1 = \text{inicio de } \alpha_2 \\ &\text{final de } \alpha_2 = \text{inicio de } \alpha_3 \\ &\qquad\vdots \\ &\text{final de } \alpha_n = j. \end{aligned}$$

En caso de que n = 0 pedimos además que i=j. De esta forma, asociamos a cada vértice i su camino trivial $\tau_i := (i//i)$, que se puede interpretar intuitivamente como "permanecer en i". Si n es positivo, a menudo escribiremos simplemente $\alpha_n\alpha_{n-1}\dots\alpha_1$ en lugar de $(j/\alpha_n,\dots,\alpha_1/i)$.

Nota: A lo largo de todo este trabajo, k denotará un campo que tomaremos algebraicamente cerrado. Tal suposición sobre k no es necesaria en este capítulo, pero es sólo con ella que se obtienen resultados interesantes en los capítulos posteriores.

Definición: Denotaremos por kC el k-espacio vectorial con base el conjunto de todos los caminos dirigidos del carcaj C (incluso los triviales). Daremos a kC estructura de k-álgebra definiendo primero la multiplicación de los básicos de la siguiente forma: $(m/\beta_p,\beta_{p-1},\ldots,\beta_1/h)\cdot(j/\alpha_n,\alpha_{n-1},\ldots,\alpha_1/i)$ vale cero si $h \neq j$, y vale $(m/\beta_p,\ldots,\beta_1,\alpha_n,\ldots,\alpha_1/i)$ en caso de que $h = j$. Este producto se extiende de manera única a todo kC de tal forma que se obtiene una k-álgebra cuyo uno es $\sum_{i\in C_0}\tau_i$. Seguiremos denotando por kC a esta álgebra y la llamaremos el <u>álgebra de carcaj</u> asociada a C.

Veamos un ejemplo:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[dr, "\alpha"] & & & & \\ & 3 \arrow[r, "\gamma"] & 4 & 5 \arrow[l, "\delta"'] \arrow[loop right, "\varepsilon"] \\ 2 \arrow[ur, "\beta"'] & & & & \end{tikzcd}$$

$$\alpha\cdot\delta = \delta\cdot\alpha = 0$$
$$\gamma\cdot\beta = \gamma\beta$$
$$\beta\cdot\gamma = 0$$
$$\delta\cdot\gamma = \gamma\cdot\delta = 0$$
$$\gamma\cdot\tau_3 = \gamma$$
$$\tau_3\cdot\gamma = 0$$
$$\tau_4\cdot\tau_4 = \tau_4.$$

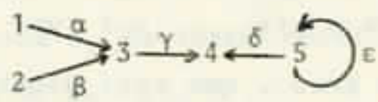
<u>§2.2</u> <u>PROPIEDADES DE kC</u>

<u>2.2.1</u> <u>Proposición</u>: $\{\tau_i \ / \ i \in C_0\}$, *todos los caminos triviales, es un sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos de kC.*

<u>Demostración</u>: El hecho de que los τ_i son idempotentes ortogo

se el conjunto de todos los caminos dirigidos del carcaj C (incluso los triviales). Daremos a kC estructura de k-álgebra definiendo primero la multiplicación de los básicos de la siguiente forma: $(m/\beta_p,\beta_{p-1},\ldots,\beta_1/h)\cdot(j/\alpha_n,\alpha_{n-1},\ldots,\alpha_1/i)$ vale cero si $h \neq j$, y vale $(m/\beta_p,\ldots,\beta_1,\alpha_n,\ldots,\alpha_1/i)$ en caso de que $h = j$. Este producto se extiende de manera única a todo kC de tal forma que se obtiene una k-álgebra cuyo uno es $\sum_{i\in C_0}\tau_i$. Seguiremos denotando por kC a esta álgebra y la llamaremos el __álgebra de carcaj__ asociada a C.

Veamos un ejemplo:



$$\alpha\cdot\delta = \delta\cdot\alpha = 0$$
$$\gamma\cdot\beta = \gamma\beta$$
$$\beta\cdot\gamma = 0$$
$$\delta\cdot\gamma = \gamma\cdot\delta = 0$$
$$\gamma\cdot\tau_3 = \gamma$$
$$\tau_3\cdot\gamma = 0$$
$$\tau_4\cdot\tau_4 = \tau_4.$$

__§2.2 PROPIEDADES DE kC__

__2.2.1 Proposición__: $\{\tau_i \;/\; i \in C_0\}$, *todos los caminos triviales, es un sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos de* kC.

__Demostración__: El hecho de que los τ_i son idempotentes ortogo gonales se debe a la definición misma de la multiplicación en kC.

Sabemos ya que $\Sigma \tau_i = 1$, así que nuestro sistema es completo.

La verificación de que cada τ_i es primitivo exige un poco más de cuidado: pedir que τ_i sea primitivo es equivalente a pedir que el anillo $\tau_i(kC)\tau_i$ tenga como único idempotente no nulo a τ_i (ver 1.2.7).

Sean $x_1, x_2, \ldots, x_r$ los ciclos dirigidos en i (i.e. caminos dirigidos de i en i) que pasan por i en exactamente dos ocasiones (si x es un tal ciclo, x^2 ya no lo es). Es fácil ver que $\tau_i(kC)\tau_i$ es isomorfo a $k\langle x_1, \ldots, x_r\rangle$ (ver 1.1.2). Pero es claro, por cuestiones de grado, que esta álgebra no posee otros idempotentes aparte de 0 y 1. //

<u>Observación</u>: Desde luego el de 2.2.1 no es, en general, el único sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos de kC. Por ejemplo, si C es el carcaj $1 \xrightarrow{\alpha} 2$, otro sistema de estos es el siguiente: $\{\tau_1+\alpha, \tau_2-\alpha\}$.

<u>2.2.2</u> <u>Proposición</u>: kC *es un álgebra indescomponible.*

<u>Demostración</u>: Por 1.3.3 bastará que probemos que los únicos idempotentes centrales de kC son 0 y 1.

Sea $d \neq 0$ un idempotente central. Veremos que $d = 1$.

Escribamos primero $d = \sum_{\gamma} \lambda_\gamma \gamma$, donde γ corre sobre los caminos dirigidos de C. Sea ahora i un vértice de C. Tenemos que $d\tau_i = \tau_i d$ por ser d central. Además:

$d\tau_i = \sum_\gamma \lambda_\gamma \gamma \tau_i = \sum_\gamma \lambda_\gamma \gamma$, donde γ corre sobre los caminos que se inician en i, y similarmente: $\tau_i d = \sum_\gamma \lambda_\gamma \tau_i \gamma = \sum_\gamma \lambda_\gamma \gamma$, donde γ corre sobre los caminos que finalizan en i.

Entonces cada γ (con $\lambda_\gamma \neq 0$) que se inicia en i también finaliza en i, o sea que los caminos γ que constituyen d (i.e. aquellos tales que $\lambda_\gamma \neq 0$) son todos ciclos. Más precisamente,

$$d \in \bigoplus_{i \in C_0} \tau_i (kC) \tau_i .$$

Escribamos $d = \sum d_i$, con cada d_i en $\tau_i(kC)\tau_i$. Usando que d es idempotente, tenemos

$$\sum d_i = d = d^2 = (\sum d_i)^2 = \sum d_i{}^2 \in \oplus \tau_i(kC)\tau_i ,$$

y entonces cada d_i es idempotente de $\tau_i(kC)\tau_i$. Hemos visto ya que entonces d_i es cero ó τ_i.

Afirmamos que ningún d_i es cero. Para empezar, algún d_i no es cero, ya que $d \neq 0$. Sea $X := \{i \in C_0 \ / \ d_i \neq 0\} \neq \emptyset$. Supongamos que, contrario a lo que se afirma, $X \neq C_0$. Entonces, siendo C conexo, existe un vértice $i_0 \in X$ y otro $j_0 \in C_0 \setminus X$ con una flecha α que los une. Sin pérdida de generalidad (el otro caso es análogo), α se inicia en i_0 y finaliza en j_0.

Pero entonces $d\alpha = \sum_{i \in X} \tau_i \alpha = 0 \neq \alpha = \sum_{i \in X} \alpha \tau_i = \alpha d$, y d no sería central. Concluímos entonces que $d_i = \tau_i$ para todo $i \in C_0$ y, por ende, que $d = \sum \tau_i = 1$. //

<u>2.2.3</u>: kC *es* k-*álgebra de dimensión finita si y sólo si* C *no tiene ciclos dirigidos.*

Es decir, si C no tiene caminos dirigidos no triviales que se inician y finalizan en el mismo vértice. La prueba de 2.2.3 es fácil y se basa en que nuestros carcajes son gráficas finitas.

<u>Definición</u>: Denotaremos por F el ideal izquierdo de kC generado por todas las flechas (i.e. caminos de longitud 1) de C. Es inmediato ver que de hecho F resulta ideal bilateral.

<u>Observación</u>: F coincide con el k-subespacio vectorial de kC que tiene por base los caminos dirigidos no triviales (i.e. de longitud mayor o igual a 1).

<u>2.2.4</u>: *El radical de* kC *coincide con* F *cuando* C *no tiene ciclos dirigidos.*

Para mostrar esto, recordemos (capítulo 1) que si Λ es una k-álgebra de dimensión finita, radΛ puede verse como:

- el máximo ideal nilpotente, o bien
- el mínimo ideal tal que el cociente es semisimple, o bien
- la intersección de todos los ideales izquierdos máximos.

Podemos utilizar aquí estas caracterizaciones puesto que 2.2.3 nos asegura que $\dim_k kC$ es finito.

Veamos primero que F es nilpotente. Como C no tiene ciclos dirigidos, hay una longitud máxima para sus caminos dirigidos, digamos m. Entonces cualquier producto de m+1 generadores de F (las flechas) deberá ser cero, y por ende $F^{m+1} = 0$.

Tenemos entonces que $F \subseteq \text{radk}C$.

Veamos ahora que kC/F es un álgebra semisimple. Es fácil ver que $\{\bar{\tau}_i \ / \ i \in C_0\}$ constituye una k-base de kC/F, de donde $kC/F \simeq k\bar{\tau}_1 \oplus \ldots \oplus k\bar{\tau}_n$ como k-espacio vectorial. Esta es también una descomposición en suma directa de álgebras, y cada una de ellas es simple. Entonces también $\text{radk}C \subseteq F$. //

Consideremos un ejemplo para ver que, en caso de que C tenga algún ciclo dirigido, lo anterior puede no ser válido.

Sea C el carcaj siguiente: $1 \circlearrowright \alpha$. Es inmediato que $kC \simeq k[x]$, y por tanto $\text{radk}C = 0$ (k es infinito).

Sin embargo, $F = \bigoplus_{n=1}^{\infty} k\alpha^n$. (Ver también el ejercicio 5.I).

§2.3 IDEALES ADMISIBLES Y COCIENTES DE ALGEBRAS DE CARCAJ

Como veremos en el siguiente capítulo, es totalmente equivalente el estudio de las álgebras de dimensión finita sobre nuestro campo k algebraicamente cerrado, al estudio de los cocientes de k-álgebras de carcaj sobre ciertos ideales que llamaremos admisibles.

Definición: Un ideal bilateral R del álgebra de carcaj kC es admisible si cumple:

(1) R está contenido en F^2

(2) R contiene a alguna potencia de F.

Consideremos algunos ejemplos de ideales admisibles:

(a) Para C un carcaj arbitrario, F^n, con $n \geq 2$, es admisible.

(b) 0 es un ideal admisible de kC si y sólo si C no tiene ciclos dirigidos.

(c) Sea C el siguiente carcaj:

$$\begin{tikzcd}
 & 2 \arrow[dr, "\beta"] & & 5 \arrow[dl, "\gamma"'] \\
1 \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & 4 \arrow[dr, "\eta"'] & \\
 & 3 \arrow[ur, "\zeta"'] & & 6 \arrow[uu, "\delta"']
\end{tikzcd}$$

Sea R el ideal bilateral de kC generado por los elementos $\beta\alpha - \zeta\varepsilon$, $\eta\beta$ y $\gamma\delta\eta$.

Claramente $R \subseteq F^2$, y también $F^5 \subseteq R$ (¡Verifique!), de donde R es admisible.

En general, dado un carcaj C y un ideal bilateral R de kC con $R \subseteq F^2$, R es admisible si y sólo si para cada ciclo dirigido γ de C existe $n \geq 1$ tal que $\gamma^n \in R$.

Procederemos ahora a analizar algunas propiedades de la k-álgebra $\Lambda = kC/R$, donde C es un carcaj y R es un ideal admisible de kC.

<u>2.3.1</u> <u>Proposición</u>: $\{\bar{\imath}_i \mid i \in C_0\}$ *es un sistema completo de idempotentes primitivos y ortogonales de* kC/R.

<u>Demostración</u>: Considerando la proyección natural $kC \longrightarrow kC/R$, vemos que el nuestro es un sistema completo de idempotentes

ortogonales, falta ver ahora que cada $\bar{\tau}_i$ es primitivo. En virtud de 1.2.7, nos basta con verificar que los únicos idempotentes de $\bar{\tau}_i(kC/R)\bar{\tau}_i$ son 0 y τ_i. Vimos ya en 2.2.1 que $\tau_i(kC)\tau_i = k\langle x_1,\ldots,x_r\rangle$, para alguna r, de donde $\bar{\tau}_i(kC/R)\bar{\tau}_i = \tau_i(kC/R)\tau_i = \tau_i(kC)\tau_i/\tau_i R\tau_i = k\langle x_1,\ldots,x_r\rangle/A$, donde A es un ideal de $k\langle x_1,\ldots,x_r\rangle$ con las siguientes propiedades:

(a) Los polinomios de A no tienen término constante.

(b) Existe un natural n tal que el ideal generado por los monomios de grado n está enteramente contenido en A.

Sea entonces $f \in k\langle x_1,\ldots,x_r\rangle$ un idempotente módulo A, o sea que $f^2 - f \in A$. Es fácil probar que el término independiente de f es cero o uno. Si es cero, f es nilpotente módulo A, y como también es idempotente módulo A, está en A. Si el término independiente de f es uno, por lo anterior 1 - f es cero módulo A, o sea que f es el 1 módulo A. //

<u>2.3.2</u> <u>Proposición</u>: *Gracias a que C es conexo, los únicos idempotentes centrales de kC/R son 0 y 1. En consecuencia kC/R es una k-álgebra indescomponible.*

<u>Demostración</u>: La prueba de 2.2.2 puede adaptarse al presente caso sin dificultad, pero aquella demostración escondía un argumento de carácter más general, que hemos indicado en el ejercicio 2.B. //

<u>2.3.3</u> <u>Proposición</u>: kC/R *es de k-dimensión finita.*

<u>Demostración</u>: En efecto, como $F^n \subseteq R$, tenemos un epimorfismo

de k-espacios vectoriales

$$kC/F^n \longrightarrow kC/R.$$

Pero las clases de los caminos de longitud menor que n forman una k-base de kC/F^n, de donde se sigue el resultado.//

2.3.4 Proposición: *Denotemos por* $\bar{F}$ *a la imagen de* F *en* kC/R. *Tenemos que* $\mathrm{rad}(kC/R) = \bar{F}$ *y, entonces,* $\mathrm{rad}^m(kC/R) = \bar{F}^m$.

Demostración: Como R es admisible, existe un natural n tal que $F^n \subseteq R$. Entonces $\bar{F}^n = 0$ y $\bar{F}$ es nilpotente.

Sabemos que $(kC/R)/\bar{F} \cong kC/F$ que, como vimos en 2.2.4, es isomorfa como k-álgebra a $k\bar{\tau}_1 \dotplus k\bar{\tau}_2 \dotplus \ldots \dotplus k\bar{\tau}_n$, que es semisimple. De 2.3.3 y los resultados de la sección 1.4 se sigue ahora nuestra proposición. //

2.3.5: De lo anterior es inmediato que $\mathrm{rad}(kC/R)/\mathrm{rad}^2(kC/R)$ es un kC/R-bimódulo que admite por k-base al conjunto $\{\bar{\bar{\alpha}}\}$, donde α recorre todas las flechas de C, $\bar{\alpha}$ es la clase de α módulo R, y $\bar{\bar{\alpha}}$ denota la clase de $\bar{\alpha}$ módulo $\mathrm{rad}^2(kC/R)$. //

2.3.6: Finalmente nos limitaremos a señalar que kC/R es básica. (Ver definición en la sección 1.2). Daremos en 5.1.1 una prueba de esto.

EJERCICIOS DEL CAPITULO 2

2.A Sea C el siguiente carcaj:

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, shift left, "\delta"] & \cdot \arrow[l, shift left, "\sigma"] \arrow[loop right, "\rho"] \end{tikzcd},$$

y sea R el ideal de kC generado por $\{\rho^4, \delta\sigma-\rho^2, \sigma(\rho-1)\delta\}$.

¿Es R admisible?

2.B (1) Sea $\Lambda = P_1 \oplus \dots \oplus P_n$ una descomposición en inescin-dibles de la k-álgebra Λ. Pruebe que Λ es descomponible si y sólo si existe un partición (I,J) no trivial de $\{1,\dots,n\}$ tal que, siempre que $i \in I$ y $j \in J$, $\mathrm{Hom}_\Lambda(P_i,P_j) = \mathrm{Hom}_\Lambda(P_j,P_i) = 0$.

(2) Si R es un ideal admisible de kC, tomemos la descom-posición $\Lambda = kC/R = \bigoplus_{i=1}^{n} (kC/R)\bar{\tau}_i$ de 2.3.1 (ver 1.2.4). Pruebe que si α es un flecha que va de i a j en C, la multiplicación por α define un Λ-morfismo no nulo de P_j (= $(kC/R)\bar{\tau}_j$) en P_i.

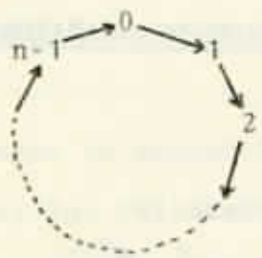
(3) Use (1) y (2) para demostrar 2.3.2.

2.C Podría omitirse "conexo" en la definición de carcaj. Pruebe que entonces se tendría:

(1) kC es indescomponible si y sólo si C es conexo.

(2) Para R admisible, kC/R es indescomponible si y só-lo si C es conexo.

2.D Sea C el siguiente carcaj:



(si n = 1, C = ).

Sea R un ideal admisible de kC. Para este carcaj especial denotaremos por γ_i^{ℓ} al (único) camino de longitud ℓ que empieza en el vértice i. Para cada vértice i, sea $\ell(i) := \min\{\ell \in \mathbb{N} / \gamma_i^{\ell} \in R\}$ (recuérdese que R es admisible). Demuestre que $\{\gamma_0^{\ell(0)}, \gamma_1^{\ell(1)}, \ldots, \gamma_{n-1}^{\ell(n-1)}\}$ es un sistema de generadores para R. En particular, si $n = 1$, los únicos ideales admisibles de kC son los de la forma F^n con $n \geq 2$. (Como veremos mas adelante -en el capítulo 4- este ejercicio es, en parte, expresión de un hecho más general: todo ideal admisible de kC es finitamente generado para C carcaj arbitrario).

2.E Algebras Tensoriales:

Sea K un anillo y A una K-álgebra. Sea M un A-A-bimódulo con acción central de K ($\lambda m = m\lambda$ para cualesquiera $\lambda \in K$ y $m \in M$). Definimos:

$$T^0(M) := {}_A A_A$$
$$T^1(M) := {}_A M_A \text{ y, para } n \geq 2,$$
$$T^n(M) := T^1(M) \otimes_A T^{n-1}(M).$$

Consideremos el A-módulo $T_A(M) := \bigoplus_{i=0}^{\infty} T^i(M)$. Pruebe que $T_A(M)$ es una K-álgebra con la multiplicación inducida por las aplicaciones $T^i(M) \times T^j(M) \longrightarrow T^{i+j}(M)$ tales que $(a,b) \longmapsto a \otimes b$.

(a) Sea C un carcaj, y sea A la k-álgebra $A := k^{C_0}$. Consideremos también el grupo abeliano $M := k^{C_1}$. Si $\lambda \in A$, $f \in M$ y $\alpha \in C_1$ (digamos $\alpha: i \longrightarrow j$), definamos $(\lambda f)(\alpha) := \lambda(j)f(\alpha)$, $(f\lambda)(\alpha) := \lambda(i)f(\alpha)$. Pruebe que con esta estructura M es un A-A-bimódulo con acción central de K.

(b) Pruebe que $kC \simeq T_A(M)$ como k-álgebras.

(c) Pruebe que si C no tiene ciclos, $\mathrm{rad}T_A(M) = $ $= \bigoplus_{i>0} T^i(M)$.

(d) Pruebe que, en general, $T_A(M) \underset{A}{\otimes} M = \bigoplus_{i>0} T^i(M)$.

2.F Sea D un subcarcaj de C (i.e. D es carcaj, $D_0 \subseteq C_0$, $D_1 \subseteq C_1$ y si $\alpha: i \rightarrow j$ en D, entonces también $\alpha: i \longrightarrow j$ en C).

Supongamos que D tiene la siguiente propiedad: siempre que se tenga una flecha $\alpha: i \longrightarrow j$ en C con $i \in D_0$, será $j \in D_0$ y $\alpha \in D_1$ (decimos que D es un subcarcaj final de C).

Definamos $e := \sum_{j \in D_0} \tau_j$, y pongamos $\mathcal{S} := e\mathcal{R}e$ donde $\mathcal{R}$ es un ideal admisible de kC.

(1) Pruebe que $kD = ekCe$ y que $\mathcal{S}$ es un ideal admisible de kD.

(2) Si $\Lambda' := kD/\mathcal{S}$, pruebe que Λ' es isomorfa al cociente de $\Lambda = kC/\mathcal{R}$ que se obtiene al dividir por el ideal de Λ generado por $\{\bar{\tau}_i \ / \ i \notin D_0\}$.

2.G Si C es un carcaj, C^* denotará el carcaj opuesto de C, que se define a continuación:

Los vértices de C^* son los mismos que los de C.

Las flechas de C^* son $C_1^* := \{\alpha^* \ / \ \alpha \in C_1\}$.

Las asignaciones de inicio y final de C^* son las inversas de las de C ($\alpha: i \rightarrow j$ en C si y sólo si $\alpha^*: j \longrightarrow i$ en C^*).

(1) Pruebe que $kC^* \cong (kC)^{op}$ (ver ejercicio 1.E).

(2) Si R es un ideal admisible de kC, obtenga un ideal admisible R^* de kC^* y demuestre que kC^*/R^* es isomorfo a $(kC/R)^{op}$.

CAPITULO 3: ALGEBRAS Y ALGEBRAS DE CARCAJ

En este capítulo mostraremos que toda k-álgebra de dimensión finita, básica e idescomponible, es isomorfa al cociente de un álgebra de carcaj por algún ideal admisible (Recuérdese que estamos suponiendo siempre que k es algebraicamente cerrado).

Recordemos que, para nuestros propósitos, pedir que un álgebra se básica e indescomponible no es una restricción (ver secciones 1.2 y 1.3).

El resultado mencionado es muy importante: Por un lado es un teorema de estructura, estamos describiendo todas las álgebras, y por otro lado nos permite "visualizar" los módulos del álgebra dada a través de representaciones del carcaj, como se verá en el capítulo 4.

El camino que se seguirá es el siguiente:

3.1: Para cada álgebra Λ construiremos su carcaj asociado C_Λ.

3.2: Construiremos un morfismo ϕ: $kC_\Lambda \longrightarrow \Lambda$ y verificaremos que es suprayectivo.

3.3: Examinaremos el núcleo de ϕ y veremos que se trata de un ideal admisible, de modo que $\Lambda \simeq kC_\Lambda/\mathrm{Ker}\phi$ como se anunció al principio.

§3.1 EL CARCAJ ORDINARIO DE UN ALGEBRA

Sea Λ una k-álgebra de dimensión finita, indescomponible y básica.

Elijamos un sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ (Desde luego, con $e_i \neq 0$ para toda i).

Definición: El carcaj ordinario de Λ, que se denota por C_Λ, se define como sigue:

C_Λ tiene n vértices (tantos como idempotentes en el sistema), numerados de 1 a n en correspondencia uno a uno con $e_1, \ldots, e_n$.

En lo que concierne a las flechas de C_Λ, el número de ellas que principian en el vértice i y terminan en el vértice j es

$$\dim_k[e_j(\mathrm{rad}\Lambda/\mathrm{rad}^2\Lambda)e_i].$$

Nótese que el cociente $\mathrm{rad}\Lambda/\mathrm{rad}^2\Lambda$ es un Λ-Λ-bimódulo, así es que $e_j(\mathrm{rad}\Lambda/\mathrm{rad}^2\Lambda)e_i$ tiene sentido. Además su dimensión es finita, ya que la de Λ lo es.

Hay otros carcajes asociados a Λ que también son herramientas útiles para su estudio (el carcaj de Auslander-Reiten, el carcaj estable, el carcaj de órbitas, el carcaj separado) y el nombre de "ordinario" se le da a C_Λ para distinguirlo de los otros. Como nosotros utilizaremos aquí solamente el carcaj ordinario, lo llamaremos simplemente "el carcaj de Λ".

Para ver que C_Λ es realmente un carcaj aún debemos probar que la gráfica obtenida es conexa. Esto se debe a que Λ es indescomponible y en el ejercicio 3.A hemos indicado como probarlo.

Proposición: *C_Λ no depende (salvo en la numeración de los vértices) del sistema completo de idempotentes primitivos ortogonales elegido en un principio.*

Demostración: El número de vértices de C_Λ esta determinado por Λ, puesto que es igual al número de inescindibles que aparecen en la descomposición de Λ como Λ-módulo (ver 1.2.1 y 1.2.4).

En cuanto a las flechas, debemos probar que si $f_1, f_2, \ldots, f_n$ es otro sistema de idempotentes numerado de tal forma que $\Lambda e_i \simeq \Lambda f_i$ para todo i, entonces

$$\dim_k e_i(\mathrm{rad}\Lambda/\mathrm{rad}^2\Lambda)e_j = \dim_k f_i(\mathrm{rad}\Lambda/\mathrm{rad}^2\Lambda)f_j.$$

Esto se debe a que $e_i(\mathrm{rad}\Lambda/\mathrm{rad}^2\Lambda)e_j \simeq e_i(\mathrm{rad}\Lambda e_j/\mathrm{rad}^2\Lambda e_j) \simeq \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda e_i, \mathrm{rad}\Lambda e_j/\mathrm{rad}^2\Lambda e_j) \simeq \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda f_i, \mathrm{rad}\Lambda f_j/\mathrm{rad}^2\Lambda f_j)$ (ver 1.2.6). //

Ejemplos de construcción de C_Λ:

3.1.1 Si $\Lambda = k[x]/(x^n)$, con $n \geq 1$. ($k[x]$ no es de dimensión finita). C_Λ tendrá un único vértice puesto que el único idempotente no nulo de Λ es 1.

$\mathrm{rad}\Lambda = (\bar{x})$ -el ideal generado por $\bar{x}$ en $k[x]/(x^n)$- .

En efecto, $(\bar{x})^n = 0$, o sea que $(\bar{x}) \subseteq \mathrm{rad}\Lambda$ y también es claro que $\Lambda/(\bar{x})$ es isomorfo a k, de donde $\mathrm{rad}\Lambda \subseteq (\bar{x})$.

En cuanto a $\mathrm{rad}\Lambda/\mathrm{rad}^2\Lambda$, su k-dimensión es 1: una base esta dada por la clase de $\bar{x}$ en este cociente.

Concluímos entonces que $C_\Lambda = 1 \circlearrowleft \alpha$.

<u>3.1.2</u> Si

$$\Lambda = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ k & k & 0 \\ k & 0 & k \end{bmatrix},$$

el anillo de matrices de la forma $\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \gamma & 0 \\ \delta & 0 & \varepsilon \end{bmatrix}$, con $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon$ en k y con la suma y multiplicación matriciales.

Un sistema completo de idempotentes primitivos ortogonales esta dado por $\{E_{11}, E_{22}, E_{33}\}$, adoptando la notación en la cual E_{ij} es la matriz cuyas entradas son todas cero salvo la entrada (i,j) que vale uno.

Por consideraciones similares a las del ejemplo anterior se tiene que

$$\mathrm{rad}\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

de aquí que $\mathrm{rad}^2\Lambda = 0$.

$E_{22}\mathrm{rad}\Lambda E_{11}$ y $E_{33}\mathrm{rad}\Lambda E_{11}$ tienen dimensión 1, y las demás combinaciones deberán ser cero ya que $\mathrm{rad}\Lambda$ es de dimensión 2. Entonces:

$$C_\Lambda = \begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ 2 & & 3 \end{tikzcd}$$

Este ejemplo se generaliza inmediatamente a

$$\Lambda = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ k & k & 0 & \dots & 0 \\ k & 0 & k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ k & 0 & 0 & \dots & k \end{bmatrix} ,$$

matrices nxn, siendo su carcaj:

$$C_\Lambda = \begin{tikzcd} & & 1 \arrow[dll] \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ 2 & 3 & \cdots & n \end{tikzcd} .$$

3.1.3 Si $\Lambda = kC/R$ es el cociente de un álgebra de carcaj por un ideal admisible, es de esperarse que C_Λ coincida con C y éste es el caso.

Sabemos (ver 2.3.1) que $\{\bar\tau_1,\bar\tau_2,\dots,\bar\tau_n\}$ es un sistema completo de idempotentes primitivos ortogonales, donde τ_i designa el camino trivial de C en el vértice i. C_Λ tiene entonces tantos vértices como C.

En cuanto a $\bar\tau_j(\mathrm{rad}\Lambda/\mathrm{rad}^2\Lambda)\bar\tau_i$, no hay dificultad en comprobar que tiene por k-dimensión el número de flechas en C que van del vértice i al vértice j (ver 2.3.5).

Entonces $C_\Lambda = C$ en este caso.

§3.2 CONSTRUCCION DE UN MORFISMO SUPRAYECTIVO $\phi: kC_\Lambda \longrightarrow \Lambda$.

3.2.1 Construcción de ϕ.

Asignaremos a cada elemento de la base de kC_Λ otro elemento en Λ. Esto dará lugar a un morfismo $\phi: kC_\Lambda \longrightarrow \Lambda$ de k-espacios vectoriales. Veremos luego que el ϕ obtenido es de hecho morfismo de k-álgebras.

Para cada $e_j(\mathrm{rad}\Lambda/\mathrm{rad}^2\Lambda)e_i$, elijamos una k-base $\{y_\alpha / \alpha \in A_{ij}\}$. Podemos tomar A_{ij} el conjunto de flechas de i a j en C_Λ, puesto que en ese conjunto hay tantas flechas como la k-dimensión de $e_j(\mathrm{rad}\Lambda/\mathrm{rad}^2\Lambda)e_i$.

Podemos ahora elegir elementos $x_\alpha \in e_j(\mathrm{rad}\Lambda)e_i$ tales que $\bar{x}_\alpha = y_\alpha$ para cada $\alpha \in A_{ij}$, para cada par de índices i,j.

Con todas estas elecciones efectuadas describiremos ahora la imagen en Λ de cada uno de los básicos de kC_Λ:

-Caminos de longitud cero (los triviales):

$$\phi(\tau_i) := e_i$$

-Caminos de longitud uno (las flechas):

$$\phi(\alpha) := x_\alpha$$

-Caminos de longitud $n > 1$:

$$\phi(\alpha_n \dots \alpha_1) := x_{\alpha_n} x_{\alpha_{n-1}} \dots x_{\alpha_1} .$$

Para verificar que ϕ es morfismo de álgebras, es suficiente ver que $\phi(\delta\gamma) = \phi(\delta)\phi(\gamma)$ para δ y γ básicos de kC_Λ (o sea, δ y γ caminos dirigidos en C_Λ).

Caso 1: longitud de δ y longitud de γ son mayores o iguales a 1.

Pongamos $\gamma = \alpha_n \dots \alpha_1$, $\delta = \beta_p \dots \beta_1$. Pongamos también $i :=$ final de γ = final de α_n, y $j :=$ principio de δ = principio de β_1.

Si $i = j$, entonces $\delta\gamma = \beta_p\ldots\beta_1\alpha_n\ldots\alpha_1$ y la igualdad que buscamos es cierta gracias a la definición de ϕ sobre los caminos de longitud mayor o igual a uno.

Si $i \neq j$, entonces $\delta\gamma = 0$. Pero también $\phi(\delta)\phi(\gamma) = 0$, ya que tenemos $\phi(\gamma) = x_{\alpha_n}\ldots x_{\alpha_1}$ con $x_{\alpha_n} \in e_i(\mathrm{rad}\Lambda)$, $\phi(\delta) =$ $= x_{\beta_p}\ldots x_{\beta_1}$ con $x_{\beta_1} \in (\mathrm{rad}\Lambda)e_j$, de donde $\phi(\delta)\phi(\gamma) = x_{\beta_p}\ldots$ $\ldots x_{\beta_1}x_{\alpha_n}\ldots x_{\alpha_1} = 0$ ya que $x_{\beta_1}\,x_{\alpha_n} = 0$ por ser $e_je_i = 0$.

<u>Caso 2</u>: $\ell(\delta) \geq 1$ y $\ell(\gamma) = 0$

<u>Caso 3</u>: $\ell(\delta) = 0$ y $\ell(\gamma) \geq 1$

<u>Caso 4</u>: $\ell(\delta) = 0$ y $\ell(\gamma) = 0$.

Cada uno de estos se trata con el mismo tipo de argumentos que el primero. Por supuesto, $\ell(\delta)$ significa "longitud de δ ".

<u>Ejemplos</u>:

(A) Sea $\Lambda = k[x]/(x^n)$ con $n \geq 1$. Sabemos por 3.1.1 que $C_\Lambda = \begin{tikzcd} 1 \arrow[loop right, "\alpha"] \end{tikzcd}$. Teníamos que $\mathrm{rad}\Lambda = (\bar{x})$ y $\mathrm{rad}^2\Lambda = (\bar{x})^2$. Eligiendo $x_\alpha = \bar{x}$, nuestra $\phi\colon kC_\Lambda \longrightarrow \Lambda$ queda definida por $\phi(\tau_1) = 1$, $\phi(\alpha) = \bar{x}$. Aquí ϕ es claramente suprayectiva, pero no inyectiva: su núcleo es (α^n) que, como es fácil ver es un ideal admisible de kC_Λ.

(B) Sea Λ el anillo de matrices 3x3 de 3.1.2. Vimos allí que:

$$C_\Lambda = \begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\ 2 & & 3 \end{tikzcd},$$

calculamos radΛ y observamos que $rad^2\Lambda = 0$. Elijamos $x_\alpha = E_{21}$ y $x_\beta = E_{31}$, usando la notación de 3.1.2. Aquí también la ϕ obtenida es suprayectiva, de hecho es un isomorfismo. De todas formas, sabemos por (b) de 2.3 que 0 es un ideal admisible de kC_Λ en este caso. En la sección 6.1 daremos una caracterización homológica de las álgebras que, como esta Λ, son isomorfas a álgebras de carcaj.

(C) Sea $\Lambda = kC/R$ el cociente de un álgebra de carcaj por un ideal admisible R. Vimos en 3.1.3 que $C_\Lambda = C$. Si hacemos las elecciones (necesarias para definir ϕ) de la manera obvia, se obtiene nuevamente que ϕ es sobre y su núcleo es precisamente el ideal R. (Sin embargo, con otras elecciones podría obtenerse, como núcleo de ϕ, algún otro ideal admisible de kC).

<u>3.2.2 ϕ es suprayectiva</u>.

<u>Teorema</u>: *El morfismo* $\phi\colon kC_\Lambda \longrightarrow \Lambda$, *definido en 3.2.1, resulta ser siempre suprayectivo.*

Demostraremos este teorema después de establecer los dos siguientes lemas, que se necesitarán en la prueba.

<u>Lema 1</u>: *Como* Λ *es básica,* $\Lambda/\mathrm{rad}\Lambda$ *lo es también.*

<u>Demostración</u>: Tenemos la descomposición en inescindibles $\Lambda = \Lambda e_1 \oplus \ldots \oplus \Lambda e_n$ y como vimos ya en 1.7.2,

$\Lambda/\mathrm{rad}\Lambda = \Lambda e_1/\mathrm{rad}\Lambda e_1 \oplus \ldots \oplus \Lambda e_n/\mathrm{rad}\Lambda e_n$ es una descomposición de $\Lambda/\mathrm{rad}\Lambda$ en inescindibles. Pero, también por 1.7.2, $\Lambda e_i \simeq \Lambda e_j$ si y sólo si $\Lambda e_i/\mathrm{rad}\Lambda e_i \simeq \Lambda e_j/\mathrm{rad}\Lambda e_j$, de donde si Λ es básica $\Lambda/\mathrm{rad}\Lambda$ lo es también. //

Lema 2: *$\Lambda/\mathrm{rad}\Lambda$ es un álgebra isomorfa a una suma de copias del campo.*

Demostración: Por 1.4.2 $\Lambda/\mathrm{rad}\Lambda$ es semisimple, y el teorema de Wedderburn-Artin (1.4.6 y 1.4.7) asegura que, como k-álgebras,

$$\Lambda/\mathrm{rad}\Lambda \simeq M_{n_1}(D_1) \dotplus \ldots \dotplus M_{n_r}(D_r),$$

donde cada D_i es un anillo con división, extensión finita de k, y $M_{n_i}(D_i)$ denota el álgebra de todas las matrices $n_i x n_i$ con entradas en D_i.

Ahora bien, el hecho de que k es algebraicamente cerrado obliga a cada D_i a coincidir con k (ver 1.4.9).

Por otra parte $\Lambda/\mathrm{rad}\Lambda$ es básica por el lema 1, y entonces cada álgebra que la compone (i.e. cada $M_{n_i}(k)$) debe serlo también (esto es un hecho general muy fácil de probar).

Pero el álgebra $M_{n_i}(k)$ sólo es básica si $n_i = 1$. En efecto, $M_{n_i}(k) = L_{n_1} \oplus L_{n_2} \oplus \ldots \oplus L_{n_i}$, donde $L_j := M_{n_i}(k)E_{jj}$, y se verifica fácilmente que $L_1 \simeq L_2 \simeq \ldots \simeq L_{n_i}$.

Hemos probado entonces que $\Lambda/\mathrm{rad}\Lambda \simeq k \dotplus \ldots \dotplus k$ como k-álgebras, pero además k es claramente inescindible y se trata entonces también de una descomposición en inescindibles de $\Lambda/\mathrm{rad}\Lambda$. Entonces, por el teorema de Krull-Schmidt, ésta descomposición es equivalente a la descomposición (*) de 1.7.2, de donde $\Lambda/\mathrm{rad}\Lambda = k\bar{e}_1 \oplus \ldots \oplus k\bar{e}_n$. //

<u>Demostración del Teorema</u>

Para mostrar que ϕ es suprayectiva consideremos los siguientes elementos de Λ:

$$\{e_1,\ldots,e_n\} \cup \{x_\alpha \ / \ \alpha \in \cup A_{ij}\}$$

Todos estos elementos se encuentran, por construcción, en la imagen de ϕ, y tal imagen es una sub-k-álgebra de Λ.

Sería pues suficiente mostrar que se trata de un sistema de generadores de Λ como k-álgebra. Es decir, que todo $\lambda \in \Lambda$ puede escribirse como un k-polinomio en esos elementos.

Consideremos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{rad}\Lambda \hookrightarrow \Lambda \longrightarrow \Lambda/\mathrm{rad}\Lambda \longrightarrow 0$$

que, como sucesión de espacios vectoriales, se escinde. Usando el lema 2 obtenemos que, como k-espacios vectoriales,

$$\Lambda = \mathrm{rad}\Lambda \oplus ke_1 \oplus \ldots \oplus ke_n.$$

Entonces, si mostramos que todo elemento de $\mathrm{rad}\Lambda$ se escribe como un k-polinomio en $\{x_\alpha \ / \ \alpha \in \cup A_{ij}\}$, ya habremos terminado.

Y eso es lo que afirma la siguiente proposición.

Notemos primero que, puesto que $\mathrm{rad}\Lambda/\mathrm{rad}^2\Lambda = \bigoplus_{i,j} e_j(\mathrm{rad}\Lambda/\mathrm{rad}^2\Lambda)e_i$, $\{\bar{x}_\alpha \ / \ \alpha \in \cup A_{ij}\}$ es una base de $\mathrm{rad}\Lambda/\mathrm{rad}^2\Lambda$.

<u>Proposición</u>: *Sea* Λ *una* k-*álgebra de dimensión finita y sea* $\{x_\alpha \ / \ \alpha \in A\}$ *un conjunto cualquiera de elementos de* $\mathrm{rad}\Lambda$ *tal que* $\{\bar{x}_\alpha \ / \ \alpha \in A\}$ *es una base de* $\mathrm{rad}\Lambda/\mathrm{rad}^2\Lambda$ *como* k-*espacio vec*

torial.

Sea B el conjunto de los elementos de Λ que pueden escribirse como k-polinomios sin término constante en los x_α, $\alpha \in \Lambda$.

Entonces $\mathrm{rad}\Lambda = B$.

Lema: *Sea* $a_\ell \in \mathrm{rad}^\ell\Lambda$ *con* $\ell \geq 1$. *Entonces existen* $a_{\ell+1} \in \mathrm{rad}^{\ell+1}\Lambda$ *y* $b \in B^\ell$ $(\subseteq B)$ *tales que* $a_\ell = a_{\ell+1} + b$.

Este lema prueba la proposición: Naturalmente, $B \subseteq \mathrm{rad}\Lambda$. Se trata de ver que $\mathrm{rad}\Lambda \subseteq B$. Pero del lema se deduce que para todo $a \in \mathrm{rad}\Lambda$ y todo $m \in \mathbb{N}$, $a = a_m + b$ con $a_m \in \mathrm{rad}^m\Lambda$ y $b \in B$. Como $\mathrm{rad}\Lambda$ es nilpotente, se sigue el resultado. Sólo necesitamos entonces probar el lema.

Demostración del lema: Haremos inducción sobre ℓ. Consideremos la sucesión exacta de k-espacios vectoriales

$$0 \longrightarrow \mathrm{rad}^2\Lambda \longrightarrow \mathrm{rad}\Lambda \longrightarrow \mathrm{rad}\Lambda/\mathrm{rad}^2\Lambda \longrightarrow 0,$$

y tomemos la sección $g: \mathrm{rad}\Lambda/\mathrm{rad}^2\Lambda \longrightarrow \mathrm{rad}\Lambda$ dada por $g(\bar{x}_\alpha) = x_\alpha$. Entonces, como k-espacios vectoriales, $\mathrm{rad}\Lambda = \mathrm{rad}^2\Lambda \oplus \mathrm{Im}g$. Como $\mathrm{Im}g \subseteq B$, ya tenemos el pie de nuestra inducción.

Supongamos ahora que $\ell > 1$ y tomemos $a_\ell \in \mathrm{rad}^\ell\Lambda$.

Basta probar nuestro lema para el caso en que a_ℓ es de la forma $a_\ell = c_1c_2\ldots c_\ell$ con $c_i \in \mathrm{rad}\Lambda$.

Sea $a'_{\ell-1} = c_1c_2\ldots c_{\ell-1} \in \mathrm{rad}^{\ell-1}\Lambda$. Por la hipótesis de inducción, existen $a'_\ell \in \mathrm{rad}^\ell\Lambda$ y $b' \in B^{\ell-1}$ tales que $a'_{\ell-1} = a'_\ell + b'$. También existen $a_2'' \in \mathrm{rad}^2\Lambda$ y $b'' \in B$

tales que $c_\ell = a_2'' + b''$.

Entonces $a_\ell = a'_{\ell-1} c_\ell = (a'_\ell + b')(a_2'' + b'') =$
$= a'_\ell a_2'' + a'_\ell b'' + b' a_2'' + b'b''$.

Como $B \subseteq \mathrm{rad}\Lambda$, $B^{\ell-1} \subseteq \mathrm{rad}^{\ell-1}$, de donde obtenemos que, si definimos $a_{\ell+1} := a'_\ell a_2'' + a'_\ell b'' + b' a_2''$ y $b := b'b''$, $a_{\ell+1} \in \mathrm{rad}^{\ell+1}\Lambda$ y $b \in B^\ell$. //

§3.3 EL NUCLEO DE ϕ ES ADMISIBLE

Recordemos que F es el ideal de kC_Λ generado por las flechas . Recordemos también que un ideal R de kC_Λ será admisible si está contenido en F^2 y contiene a alguna potencia de F.

En esta sección nos consagraremos a probar que el núcleo de ϕ (definido en 3.2.1) es un ideal admisible de kC_Λ. Como hemos ya observado, esto nos dará el siguiente resultado:

Teorema: *Si Λ es una k-álgebra de dimensión finita, básica e indescomponible (y k es algebraicamente cerrado), entonces Λ es isomorfa al cociente de un álgebra de carcaj (el álgebra de su carcaj) por un ideal admisible.*

Haremos en tres partes la prueba de la admisibilidad del núcleo de ϕ.

<u>3.3.1</u> $\mathrm{Ker}\phi \subseteq F$.

En efecto, sea $a \in \mathrm{Ker}\phi$. Como $a \in kC_\Lambda$, puede escribir se como combinación k-lineal de la base:

$$a = \Sigma\ \lambda_i \tau_i + x$$

donde τ_i recorre los caminos triviales y $x \in F$.

Entonces $0 = \phi(a) = \Sigma\ \lambda_i e_i + \phi(x)$.

Por la construcción de ϕ y por estar $x \in F$, tenemos que $\phi(x) \in \mathrm{rad}\Lambda$, de donde $\Sigma\ \lambda_i e_i \in \mathrm{rad}\Lambda$.

Siendo los e_i idempotentes ortogonales, $\Sigma\ \lambda_i e_i$ no es nilpotente mas que cuando todos los λ_i son cero.

Como $\mathrm{rad}\Lambda$ es nilpotente (ya que Λ es k-álgebra de dimensión finita), cada elemento de $\mathrm{rad}\Lambda$ debe ser nilpotente.

Se sigue que cada λ_i es cero, de donde $a = x \in F$. //

<u>3.3.2</u> $\mathrm{Ker}\phi \subseteq F^2$.

Sea $a \in \mathrm{Ker}\phi$. Por lo anterior, sabemos que $a \in F$, o sea que

$$a = \Sigma\ \lambda_\alpha \alpha + y\ ,$$

donde $y \in F^2$ y α recorre las flechas de C.

Entonces $0 = \phi(a) = \Sigma\ \lambda_\alpha x_\alpha + \phi(y)$.

Puesto que $y \in F^2$, $\phi(y) \in \mathrm{rad}^2\Lambda$. Por otro lado, $\Sigma\ \lambda_\alpha x_\alpha \in \mathrm{rad}\Lambda$, puesto que cada $x_\alpha \in \mathrm{rad}\Lambda$.

Considerando la situación módulo $\mathrm{rad}^2\Lambda$, tenemos que

$$0 = \Sigma\ \lambda_\alpha \bar{x}_\alpha ,$$

pero $\{\bar{x}_\alpha\ /\ \alpha \in \cup\ A_{ij}\}$ es una base de $\mathrm{rad}\Lambda/\mathrm{rad}^2\Lambda$, de donde ca da λ_α es cero y $a = y \in F^2$. //

<u>3.3.3</u> Kerϕ *contiene alguna potencia de* F.

En efecto, por un lado $F^r \subseteq \phi^{-1}(\mathrm{rad}^r\Lambda)$ para cada r, por construcción de ϕ.

Por otro lado, radΛ es nilpotente, digamos $\mathrm{rad}^m\Lambda = 0$, de donde $F^m \subseteq \phi^{-1}(0) = \mathrm{Ker}\phi$. //

<u>Conclusión del capítulo</u>:

Es equivalente estudiar álgebras indescomponibles básicas de k-dimensión finita con k algebraicamente cerrado, a estudiar cocientes de álgebras de carcaj por ideales admisibles.

EJERCICIOS DEL CAPITULO 3

3.A Usando el ejercicio 2.C, pruebe que la gráfica C_Λ, obtenida en 3.1, es conexa.

3.B Sea Λ el álgebra de matrices triangulares superiores nxn con entradas en k. Calcule C_Λ.

3.C El campo de los números complejos, $\mathbb{C}$, es una $\mathbb{R}$-álgebra de dimensión finita, básica e indescomponible. Sin embargo, no existe ningún carcaj C tal que $\mathbb{C}$ sea cociente de $\mathbb{R}C$ por un ideal admisible. La hipótesis "k es algebraicamente cerrado" es indispensable.

3.D (1) El carcaj C_Λ es el único (desde luego salvo numeración de los vértices) carcaj C tal que Λ es cociente de kC por algún ideal admisible R de kC.

(2) No ocurre lo mismo con R. Considere el carcaj siguiente:

$$C = \begin{tikzcd}[row sep=small] & \cdot \arrow[dr, "\beta"] & \\ \cdot \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & \cdot \\ & \cdot \arrow[ur, "\delta"'] & \end{tikzcd},$$

y los ideales de kC generados por $\beta\alpha + \delta\gamma$ y $\beta\alpha - \delta\gamma$ respectivamente. Pruebe que se trata de ideales admisibles, diferentes si la característica del campo es distinta de 2, y que los cocientes de kC por estos ideales son isomorfos.

(3) Otro ejemplo: Si (C,R) es el carcaj con relaciones de 2.A, y R' es el ideal de kC generado por $\sigma\delta$ y $\delta\sigma - \rho^2$, entonces kC/R y kC/R' son isomorfas cuando la característica de k es distinta de 2.

<u>3.E</u> (1) $F^\ell \subseteq \phi^{-1}\mathrm{rad}^\ell\Lambda$, $\ell = 1,2,3,\ldots$.

(2) Para $\ell = 1$ y $\ell = 2$, se tiene la igualdad en (1).

(3) Para $\ell = 3$, no necesariamente.

<u>3.F</u> Supongamos que Λ' es un cociente de Λ, o sea que tenemos un morfismo suprayectivo $\phi: \Lambda \longrightarrow \Lambda'$ de k álgebras. Supongamos además que $\mathrm{Ker}\phi \subseteq \mathrm{rad}^2\Lambda$.

(1) Demuestre que $C_\Lambda = C_{\Lambda'}$.

(2) Tenemos entonces un morfismo sobre de k-álgebras $\psi: kC_\Lambda \longrightarrow \Lambda'$ (ver la teoría de este capítulo). Pruebe que si $\mathrm{Ker}\phi = \mathrm{rad}^2\Lambda$ (i.e. si $\Lambda' = \Lambda/\mathrm{rad}^2\Lambda$), entonces el ideal admisible $\mathrm{Ker}\psi$ de kC_Λ es igual a F^2.

(3) Concluya que $\mathrm{rad}^2\Lambda = 0$ si y sólo si $R = F^2$, donde R es el núcleo del morfismo definido en 3.2.1.

(4) Muestre que lo análogo no vale para potencias más altas de $\mathrm{rad}\Lambda$.

<u>3.G</u> Utilizando la notación de 1.E y 2.G, pruebe que si Λ es una k-álgebra de dimensión finita, básica e indescomponible,

(1) $C_{\Lambda^{op}} \simeq C^*_\Lambda$

(2) Hay un morfismo sobre $\psi: kC^*_\Lambda \longrightarrow \Lambda^{op}$ tal que $\mathrm{Ker}\psi = R^*$, donde R es el núcleo del morfismo definido en 3.2.1.

CAPITULO 4: REPRESENTACIONES DE CARCAJES

Nuestro objeto de estudio es una k-álgebra Λ de dimensión finita. Hemos dicho ya que lo que nos interesa de Λ son las propiedades categóricas de modΛ, por lo que hemos podido suponer que Λ es básica e indescomponible.

Por el capítulo anterior, sabemos que $\Lambda \simeq kC/R$ para algún carcaj C (que sabemos construir a partir de Λ) y algún ideal admisible R de kC. (R no es único, pero todos los posibles se obtienen haciendo, de todas las formas posibles, las elecciones previas a la definición de ϕ, ver 3.2.1).

Ahora bien, ¿de qué nos sirve esto, si lo que queremos es estudiar modΛ ? En este capítulo veremos que los Λ-módulos se pueden "visualizar" sobre el carcaj C, y en el capítulo siguiente veremos que muchos módulos importantes (proyectivos, simples, etc.) son susceptibles de "visualizaciones" particularmente sencillas.

Durante todo este capítulo, C es un carcaj arbitrariamente dado, R es un ideal admisible de kC y Λ = kC/R.

§4.1 ALGO SOBRE IDEALES ADMISIBLES

Habiendo mostrado ya la razón de nuestro interés en los ideales admisibles, pasaremos a describirlos un poco mejor. Veremos en esta sección que es posible elegir un "buen" sistema de generadores para R.

Observación: En general, kC no es un anillo noetheriano, como se vé en el caso particular en que C es el carcaj siguiente:

En efecto, $(\alpha) \subsetneq (\alpha,\alpha\beta) \subsetneq (\alpha,\alpha\beta,\alpha\beta^2) \subsetneq \ldots$ es un cadena ascendente no estacionaria de ideales izquierdos.

No hay entonces, a priori, ninguna razón para esperar que los ideales de kC sean finitamente generados. Sin embargo, veremos que los ideales admisibles sí lo son:

4.1.1 *R es un ideal finitamente generado de* kC.

En efecto, sabemos que para alguna n se tiene una sucesión exacta $0 \longrightarrow F^n \hookrightarrow R \longrightarrow R/F^n \longrightarrow 0$. F^n es kC-módulo finitamente generado (por los caminos de longitud n), de modo que para ver que R es finitamente generado basta ver que R/F^n lo es. Pero esto sucede efectivamente, ya que $R/F^n \subseteq kC/F^n$ y este último es de k-dimensión finita (una base está formada por los caminos de longitud menor que n), de donde R/F^n es de dimensión finita y, por tanto, finitamente generado. //

Persiguiendo la idea de poder "leer" a R sobre el carcaj mismo, vamos a someter a los generadores a algunas manipulaciones. Primero veamos la siguiente

Definición: Una relación ρ es un elemento no nulo $\rho \in R$. Entonces ρ es una combinación k-lineal de caminos de longitud mayor o igual a dos. En caso de que los caminos que constituyen a ρ (i.e., aquellos con coeficiente distinto de cero) tengan todos el mismo punto de partida y el mismo punto final (digamos i y j), diremos que la relación ρ es <u>legible</u> o, más explícitamente, que es una relación <u>legible de i a j</u>.

Ahora, por 4.1.1, podemos tomar un conjunto finito de kC-generadores de R, $\{\rho_1,\ldots,\rho_m\}$. En principio, estas relaciones no tienen por que ser legibles, pero cada $\tau_j\rho_t\tau_i$ es legible si no es el cero de kC. Como $\rho_t = \sum_{i,j}\tau_j\rho_t\tau_i$ para toda t, es muy fácil comprobar que $\{\tau_j\rho_t\tau_i \neq 0 / t=1,\ldots,m;\ i,j=1,\ldots,n\}$ es también un conjunto de generadores de R. Tenemos entonces el siguiente resultado:

<u>4.1.2</u> *R posee un* <u>sistema legible de generadores</u>, *es decir, un conjunto finito de* kC-*generadores que son relaciones legibles.* //

<u>4.1.3</u> Al par (C,R), donde C es cualquier carcaj y R es un ideal admisible de kC, se le suele llamar un <u>carcaj con relaciones</u>. Si $\{\rho_1,\ldots,\rho_m\}$ es un sistema legible de generadores de R, también se le llama carcaj con relaciones a $(C;\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_m)$, ó, más expresivamente, $(C;\rho_1=\rho_2=\ldots=\rho_m=0)$. Es más bien de esta segunda manera como suelen presentarse, en la práctica, los carcajes con relaciones.

§4.2 REPRESENTACIONES DE CARCAJES CON RELACIONES

En esta sección daremos sólo una lista de definiciones y un ejemplo. En la sección siguiente veremos que lo hecho en ésta es "visualizar" los Λ-módulos.

4.2.1 Una k-representación (o, sencillamente, une representación) del carcaj C es una pareja $V = ((V_i),(f_\alpha))$ que consta de una familia de k-espacios vectoriales V_i, uno por cada vértice i de C, y una familia de transformaciones f_α, una por cada flecha α de C. Desde luego, se exige que si α es una flecha de i a j (abreviadamente, "si $\alpha: i \longrightarrow j$ "), entonces $f_\alpha: V_i \longrightarrow V_j$.

4.2.2 Un morfismo de representaciones $\phi: V \longrightarrow V'$ es una familia $\phi = (\phi_i) = (\phi_i: V_i \longrightarrow V'_i)$ de transformaciones lineales, una por cada vértice i de C, tales que para cada flecha $\alpha: i \longrightarrow j$ en C, conmuta el cuadrado

$$\begin{tikzcd} V_i \arrow[r, "f_\alpha"] \arrow[d, "\phi_i"] & V_j \arrow[d, "\phi_j"] \\ V'_i \arrow[r, "f'_\alpha"] & V'_j \end{tikzcd},$$

o sea que $\phi_j f_\alpha = f'_\alpha \phi_i$ para toda $\alpha: i \longrightarrow j$ en C.

4.2.3 Si V es una representación de C y $\gamma = (j|\alpha_n,\alpha_{n-1},\ldots,\alpha_1|i)$ es un camino dirigido no trivial de C, podemos evaluar V en γ como sigue:

$$V(\gamma) := f_{\alpha_n} \circ f_{\alpha_{n-1}} \circ \ldots \circ f_{\alpha_1} ,$$

siendo entonces $V(\gamma): V_i \longrightarrow V_j$ una transformación lineal.

Si $\rho = \Sigma\, \lambda_\gamma \gamma$ es una relación legible, digamos de i a j, aún tiene sentido evaluar V en ρ poniendo:

$$V(\rho) = \Sigma\, \lambda_\gamma V(\gamma) ,$$

y, nuevamente, $V(\rho): V_i \longrightarrow V_j$ es lineal.

4.2.4 Sea V una representación de C y ρ una relación legible de R. Diremos que V satisface ρ si la anula, es decir, si $V(\rho) = 0$. Diremos que V satisface R si V satisface cada relación legible de R.

La importancia de 4.1.2 radica en lo siguiente:

Lema: *Sea* $\{\rho_1,\ldots,\rho_m\}$ *cualquier sistema legible de generadores para* R. *Entonces la representación* V *satisface* R *si y sólo si* V *satisface* ρ_i *para* $i = 1,\ldots,m$. //

Entonces, para ver si V satisface R, hay que hacer solo un número finito de cálculos, y el resultado no dependerá del sistema legible de generadores de R que tengamos.

Si V satisface R suele decirse que V es una representación de C sujeta a las relaciones de R, o que es una representación del carcaj con relaciones (C,R); si $\{\rho_1,\ldots,\rho_m\}$ es un sistema legible de generadores de R, también suele decirse, en virtud de lo anterior, que V es una representación de C sujeta a las relaciones $\rho_1 = 0, \rho_2 = 0, \ldots, \rho_m = 0$, o que es una representación de $(C;\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_m)$.

4.2.5 Denotaremos por Mod(C,R) a la categoría cuyos objetos son las representaciones de (C,R) y cuyos morfismos son los morfismos de representaciones, con la composición evidente ("por coordenadas").

Denotaremos por mod(C,R) a la subcategoría plena de Mod(C,R) cuyos objetos son los objetos V de Mod(C,R) tales que V_i es de k-dimensión finita para todo vértice i de C.

Para finalizar la sección, veamos un ejemplo.

Sea C el carcaj siguiente:

$$\begin{tikzcd}
 & 2 \arrow[dr, "\beta"] & & 5 \arrow[dl, "\gamma"'] \\
1 \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & 4 \arrow[dr, "\eta"'] & \\
 & 3 \arrow[ur, "\zeta"'] & & 6 \arrow[uu, "\delta"']
\end{tikzcd}$$

Vimos en 2.3(c) que $R = \langle \beta\alpha - \zeta\varepsilon, \eta\beta, \gamma\delta\eta \rangle$ es un ideal admisible de kC.

Ciertamente, $\{\beta\alpha - \zeta\varepsilon, \eta\beta, \gamma\delta\eta\}$ es un sistema legible de generadores para R. $\beta\alpha - \zeta\varepsilon$ es una <u>relación de conmutatividad</u> (una relación legible que es diferencia de dos caminos), $\eta\beta$ y $\gamma\delta\eta$ son <u>relaciones cero</u> (constan de un solo camino).

Un objeto de Mod(C,R) es una pareja $V = ((V_1,\ldots,V_6), (f_\alpha,\ldots,f_\eta))$, donde $V_1,\ldots,V_6$ son k-espacios vectoriales, $f_\alpha\colon V_1 \longrightarrow V_2$, $f_\beta\colon V_2 \longrightarrow V_4$, $f_\gamma\colon V_5 \longrightarrow V_4$, $f_\delta\colon V_6 \longrightarrow V_5$, $f_\varepsilon\colon V_1 \longrightarrow V_3$, $f_\zeta\colon V_3 \longrightarrow V_4$ y $f_\eta\colon V_4 \longrightarrow V_6$ son transformaciones lineales y $f_\beta f_\alpha - f_\zeta f_\varepsilon = 0$, $f_\eta f_\beta = 0$ y $f_\gamma f_\delta f_\eta = 0$. Dicho de manera más cómoda, V es un diagrama de espacios vectoriales y transformaciones lineales

$$
\begin{tikzcd}
 & V_2 \arrow[dr, "f_\beta"] & & & V_5 \arrow[dll, "f_\gamma"'] \\
V = V_1 \arrow[ur, "f_\alpha"] \arrow[dr, "f_\varepsilon"'] & & V_4 \arrow[drr, "f_\eta"'] & & \\
 & V_3 \arrow[ur, "f_\zeta"'] & & & V_6 \arrow[uu, "f_\delta"']
\end{tikzcd}
$$

tal que el cuadro izquierdo conmuta y $f_\eta f_\beta, f_\gamma f_\delta f_\eta$ son cero.

Si V' es otra representación, un morfismo $\phi\colon V \xrightarrow[\bullet]{} V'$ es un familia $(\phi_i\colon V_i \longrightarrow V'_i)_{i=1}^{6}$ de aplicaciones lineales tales que $\phi_2 f_\alpha = f'_\alpha \phi_1, \phi_1 f_\beta = f'_\beta \phi_3$, $\phi_4 f_\gamma = f'_\gamma \phi_5$, $\phi_5 f_\delta = f'_\delta \phi_6$, $\phi_3 f_\varepsilon = f'_\varepsilon \phi_1$, $\phi_4 f_\zeta = f'_\zeta \phi_3$ y $\phi_6 f_\eta = f'_\eta \phi_4$, o, dicho de manera más cómoda, tales que conmutan los "cuadrados verticales" del siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
 & V_2 \arrow[dr] \arrow[ddd, "\phi_2"] & & & V_5 \arrow[dll] \arrow[ddd, "\phi_5"] \\
V_1 \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[ddd, "\phi_1"'] & & V_4 \arrow[dr] \arrow[ddd, "\phi_4"'] & & \\
 & V_3 \arrow[ur] \arrow[ddd, "\phi_3"'] & & V_6 \arrow[uur] \arrow[ddd, "\phi_6"'] & \\
 & V'_2 \arrow[dr] & & & V'_5 \arrow[dll] \\
V'_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & V'_4 \arrow[dr] & & \\
 & V'_3 \arrow[ur] & & V'_6 \arrow[uur] &
\end{tikzcd}
$$

§4.3 CORRESPONDENCIA ENTRE MODULOS Y REPRESENTACIONES

Recordemos que $\Lambda = kC/R$. Por una parte Λ es una k-álgebra y tenemos sus categorías de módulos ModΛ y modΛ (ver notación en la sección 1.1). Por otra parte (C,R) es un carcaj con relaciones y tenemos sus categorías de representaciones Mod(C,R) y mod(C,R) (ver 4.2.5). Estas cuatro son ejemplos de <u>k-categorías</u>: categorías en las que cada Hom(X,Y) posee estructura de k-espacio vectorial y la composición de morfismos es bilineal.

Sabemos que dos categorías A y B pueden considerarse como "la misma" cuando son <u>equivalentes</u>: hay funtores

$F: A \longrightarrow B$ y $G: B \longrightarrow A$ tales que $FG \simeq 1_B$ y $GF \simeq 1_A$; si A y B fueran k-categorías, esto nos diría que son "la misma" como categorías, pero aún podrían tener muy diferentes k-estructuras. Diremos entonces que las k-categorías A y B son <u>equivalentes</u> si las equivalencias F y G de arriba son <u>k-funtores</u>: restringidos al k-espacio vectorial de morfismos entre dos objetos cualesquiera son aplicaciones k-lineales.

En esta sección justificaremos nuestras anteriores afirmaciones en el sentido de que las representaciones de (C,R) son "visualizaciones" de los Λ-módulos, pues bocetaremos una prueba del siguiente resultado:

<u>4.3.1</u> <u>Teorema</u>: *Las* k-*categorías* ModΛ *y* Mod(C,R) *son equivalentes*.

Como ya hemos dicho, es realmente modΛ (y no ModΛ) la categoría en que estamos interesados, de forma que el siguiente teorema tiene aún más relevancia para nosotros:

<u>4.3.2</u> <u>Teorema</u>: *Las* k-*categorías* modΛ *y* mod(C,R) *son equivalentes*.

Nos proponemos dar a grandes rasgos una demostración de estos teoremas, los detalles son argumentos sencillos que dejaremos al lector. La prueba es tan importante como los dos teoremas, ya que ella nos da la manera de "traducir" módulos a representaciones y viceversa.

(A) De módulos a representaciones

Definiremos un k-funtor $F: \mathrm{Mod}\Lambda \longrightarrow \mathrm{Mod}(C,R)$.

Sea M un Λ-módulo.

Si i es un vértice de C, V_i será el k-espacio vectorial $V_i := \bar{\tau}_i M$, donde $\bar{\tau}_i$ es la clase de τ_i en $\Lambda = kC/R$.

Si $\alpha: i \longrightarrow j$ es una flecha en C, definimos $f_\alpha: V_i \longrightarrow V_j$ como la "multiplicación por $\bar{\alpha}$", o sea que $f_\alpha(x) := \bar{\alpha}x$ ($= \bar{\tau}_j\bar{\alpha}x \in V_j$). Como M era un Λ-módulo, f_α es k-lineal.

Tenemos ya una representación $V = ((V_i),(f_\alpha))$ de C. Queremos definir $F(M) := V$, pero para esto hay que ver que $V \in \mathrm{Mod}(C,R)$. Sea $\rho = \Sigma\, \lambda_\gamma \gamma$ una relación legible de R, digamos que ρ "va de i a j". Para ver que V satisface ρ, supongamos que cada γ es de la forma $\gamma = \alpha_n \dots \alpha_1$ (esta expresión varía dependiendo de γ). Si $x \in V_i$, tenemos que $V(\rho)(x) = $
$= \Sigma\, \lambda_\gamma V(\gamma)(x) = \Sigma\, \lambda_\gamma f_{\alpha_n} \dots f_{\alpha_1}(x) = \Sigma\, \lambda_\gamma \bar{\alpha}_n \dots \bar{\alpha}_1 \cdot x = (\Sigma\, \lambda_\gamma \bar{\gamma}) \cdot x =$
$= \bar{\rho} \cdot x = 0 \cdot x = 0$. Con esto tenemos ya definido nuestro funtor F en los objetos.

Sea $\phi: M \longrightarrow M'$ un morfismo en $\mathrm{Mod}\Lambda$. Tenemos ya $F(M) = V$ y $F(M') = V'$, queremos un morfismo de representaciones $F(\phi) = (\phi_i): V \longrightarrow V'$.

Si $i \in C_0$, a cada elemento $\bar{\tau}_i x$ de $V_i = \bar{\tau}_i M$ le podemos aplicar ϕ y obtener $\phi(\bar{\tau}_i x) = \bar{\tau}_i \phi(x)$, o sea que puede restringirse ϕ a una aplicación lineal $\phi_i: V_i \longrightarrow V'_i$. La familia $F(\phi) := (\phi_i)$, ¿será un morfismo de $\mathrm{Mod}(C,R)$?. Necesitaríamos que $\phi_j f_\alpha = f'_\alpha \phi_i$ para toda flecha $\alpha: i \longrightarrow j$ en C, pero esto se sigue de las definiciones anteriores y del hecho de que

ϕ era un morfismo de Λ-módulos.

Es fácil verificar ahora que $F\colon \mathrm{Mod}\Lambda \longrightarrow \mathrm{Mod}(C,R)$ es un k-funtor.

(B) De Representaciones a Módulos

Daremos ahora un k-funtor $G\colon \mathrm{Mod}(C,R) \longrightarrow \mathrm{Mod}\Lambda$.

Sea $V = ((V_i),(f_\alpha))$ un objeto de $\mathrm{Mod}(C,R)$.

Consideremos al k-espacio vectorial $M := V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \ldots \oplus V_n$. Quisiéramos una estructura de Λ-módulo en M para poder definir $G(V) := M$.

Para esto veremos primero que M tiene una muy natural estructura de kC-módulo. Definiremos quien es $\gamma m \in M$ para cualquier $m \in M$ y cualquier camino dirigido γ de C, y entonces λm (con $\lambda \in kC$ arbitrario) se podrá definir de una sola manera para obtener una estructura de kC-módulo en M.

Si nuestro camino γ es el camino trivial τ_i, pondremos $\gamma m = \tau_i m := m_i$ (recordar que $m \in M = \oplus V_i$).

Si γ no es trivial, consideremos la transformación lineal $V(\gamma)\colon V_i \longrightarrow V_j$ (si γ va de i a j). Como $m_i \in V_i$, $V(\gamma)(m_i) \in V_j$, y ésta será la única coordenada no nula de γm, o sea que $(\gamma m)_\ell = \delta_{j\ell} V(\gamma)(m_i)$, donde $\delta_{j\ell}$ es la delta de Kronecker.

Con esto M es ya un kC-módulo, pero de una clase muy especial: si tomamos $\lambda \in R$, será $\lambda m = 0$ para toda $m \in M$ (esto se debe a que V satisface R). Esta es precisamente la propiedad que nos permite "ver" a M como kC/R-módulo (i.e., como

Λ-módulo). En efecto, puede definirse $\bar{\lambda}m := \lambda m$ para todo $\lambda \in kC$, donde $\bar{\lambda}$ denota la clase de λ en Λ, y se verifica que, con esta acción, $G(V) := M \in \mathrm{Mod}\Lambda$.

Sea $\phi = (\phi_i)\colon V \longrightarrow V'$ un morfismo en $\mathrm{Mod}(C,R)$. Necesitamos definir un Λ-morfismo $G(\phi)\colon G(V) \longrightarrow G(V')$, pero esto es fácil: como $G(V) = \oplus V_i$ y $G(V') = \oplus V'_i$, tenemos una transformación k-lineal $G(\phi) = \oplus \phi_i\colon G(V) \longrightarrow G(V')$. Se prueba sin dificultad que, dado que ϕ era morfismo de representaciones, $G(\phi)$ es un kC-morfismo y, por lo tanto, un Λ-morfismo de $G(V)$ a $G(V')$. (Desde luego, con las Λ-estructuras definidas anteriormente para $G(V)$ y $G(V')$).

Ahora puede verificarse fácilmente que ya tenemos un k-funtor $G\colon \mathrm{Mod}(C,R) \longrightarrow \mathrm{Mod}\Lambda$.

(C) La equivalencia

La prueba de 4.3.1 es ahora muy fácil: basta probar que tenemos isomorfismos naturales $\eta\colon FG \longrightarrow 1_{\mathrm{Mod}(C,R)}$ y $\rho\colon GF \longrightarrow 1_{\mathrm{Mod}\Lambda}$, pero de hecho η y ρ son "casi la identidad". Para ilustrar esto, tomemos $V = ((V_i),(f_\alpha))$ en $\mathrm{Mod}(C,R)$; entonces $FG(V) = ((V'_i),(f'_\alpha))$, donde $V'_i = \bar{\tau}_i(GV) =$
$= V_i \oplus (\bigoplus_{j\neq i} 0)$. //

(D) Restricción de la equivalencia

Para probar 4.3.2 bastará probar que todo objeto de $\mathrm{mod}\Lambda$ se aplica bajo F en uno de $\mathrm{mod}(C,R)$ y que, recíprocamente, todo objeto de mod(C,R) se aplica bajo G en uno de modΛ. Esto se sigue, sin embargo, de la observación (hecha en la sección 1.1) de que, como Λ es de k-dimensión finita, modΛ coincide con la subcategoría plena de ModΛ constituída por los Λ-módulos de k-dimensión finita. //

EJERCICIOS DEL CAPITULO 4

4.A Sea (C,R) un carcaj con relaciones

(1) Describa el objeto cero de $\mathrm{Mod}(C,R)$.

(2) Si $\phi: V \longrightarrow V'$ es un morfismo en $\mathrm{Mod}(C,R)$, describa $\mathrm{Ker}\phi$, $\mathrm{Im}\phi$ y $\mathrm{Coker}\phi$.

(3) Describa los isomorfismos, monomorfismos, epimorfismos y morfismos cero de $\mathrm{Mod}(C,R)$.

(4) Describa las sucesiones exactas de $\mathrm{Mod}(C,R)$.

(5) Si V y V' son dos objetos de $\mathrm{Mod}(C,R)$, describa su suma directa $V \oplus V'$.

(6) Si V es un objeto de $\mathrm{Mod}(C,R)$, describa todos los objetos V' de $\mathrm{Mod}(C,R)$ tales que:

(a): $V \cong V'$.

(b): V' es subobjeto de V.

(c): V' es cociente de V.

4.B Sea (C,R) un carcaj con relaciones y sea $V = ((V_i),(f_\alpha))$ un objeto de $\mathrm{Mod}(C,R)$. Definamos el soporte de V como el conjunto $\mathrm{Supp}V := \{i \in C_0 \ / \ V_i \neq 0\}$. Demuestre que si V es inescindible, entonces $\mathrm{Supp}V$ es conexo como subgráfica (plena) de C.

4.C En la situación del ejercicio 2.F tenemos que, como Λ' es un cociente de Λ, existe una inmersión plena y exacta de $\mathrm{Mod}\Lambda'$ en $\mathrm{Mod}\Lambda$ que consiste en "ver" los Λ'-módulos como Λ-módulos por restricción de escalares. Por 4.3.1, tendremos también una inmersión plena y exacta $E: Mod(D,S) \longrightarrow Mod(C,R)$. Describa explícitamente E y su imagen.

4.D Sea C un carcaj arbitrario. Denotemos por Mod(C) a la categoría de todas las k-representaciones de C y por mod(C) a la subcategoría plena de Mod(C) definida por las representaciones V tales que V_i es de k-dimensión finita para todo $i \in C_0$. Nótese que si C tiene ciclos dirigidos kC no es de dimensión finita, pero en todo caso es una k-álgebra y tenemos sus categorías de módulos ModkC y modkC. Pruebe lo siguiente:

(1) Las k-categorías ModkC y Mod(C) son equivalentes.

(2) modkC y mod(C) son equivalentes si y sólo si C no tiene ciclos dirigidos.

4.E Consideremos un carcaj con relaciones (C,R) y sea (C^*,R^*) el carcaj con relaciones opuesto que se obtuvo en 2.G. Sabemos que si $\Lambda = kC/R$, entonces $\Lambda^{op} \simeq kC^*/R^*$ y por 1.E tenemos una dualidad $D: mod\Lambda \longrightarrow mod\Lambda^{op}$. Queremos "visualizar" esta dualidad. Tenemos las equivalencias $G: mod(C,R) \longrightarrow mod\Lambda$ y $F: mod\Lambda \longrightarrow mod(C^*,R^*)$, de donde la composición FDG es una dualidad que también denotaremos por $D: mod(C,R) \longrightarrow mod(C^*,R^*)$.

(1) Sea $V = ((V_i),(f_\alpha))$ un objeto de mod(C,R). Para cada $i \in C_0$, pongamos $V_i{}^* = Hom\ (V_i,k)$ y para cada $\alpha \in C_1$ sea $g_{\alpha^*} := f_\alpha^t$ la transpuesta de f_α. Pruebe que $D(V) = ((V_i{}^*),(g_{\alpha^*}))$.

(2) Si $\phi: V \longrightarrow V'$ es un morfismo en mod(C,R), describa su imagen $D(\phi): D(V') \longrightarrow D(V)$ en $mod(C^*,R^*)$.

CAPITULO 5: DESCRIPCION DE ALGUNOS MODULOS

Anteriormente hemos dicho que las representaciones de carcajes son más manejables que los módulos pues se pueden "visualizar". Como ilustración de esto, pasaremos a dar descripciones diagramáticas de algunos módulos interesantes. Estudiaremos los módulos simples, los proyectivos inescindibles, sus radicales, y los módulos inyectivos inescindibles.

A lo largo de todo el capítulo (C,R) será un carcaj con relaciones y $\Lambda = kC/R$. Pondremos también $C_0 = \{1,\ldots,n\}$.

§5.1 DESCRIPCION DE LOS MODULOS SIMPLES

Definición: Si j es uno de los vértices de C, denotaremos por S_j a la representación $S_j = ((S_j)_i,(f_\alpha))$ dada como sigue:

$$(S_j)_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ k & \text{si } i = j \end{cases}, \text{ y}$$

$$f_\alpha = 0, \text{ para toda } \alpha \in C_1.$$

Claramente, S_j es una representación de C sujeta a las relaciones de R (cualesquiera que estas sean) y, al no poseer ninguna sub-representación propia no trivial, es una representación simple de (C,R). A S_j suele llamársele el simple asociado al vértice j.

Notemos que $S_1,S_2,\ldots,S_n$ son simples no isomorfos dos a dos (ver el ejercicio 4.A)

Por otro lado, puesto que Λ es una k-álgebra de dimensión finita, sabemos que existe una biyección entre cualquier sistema completo de idempotentes ortogonales primitivos (en particular $\{\bar{\tau}_1,\ldots,\bar{\tau}_n\}$) y las clases de isomorfía de los Λ-módulos simples (ver 1.7.2). Se deduce entonces que Λ tiene exactamente n clases de isomorfía de simples.

Entonces $S_1,S_2,\ldots,S_n$ es una lista completa y sin repeticiones de todos los Λ-módulos simples.

5.1.1 Como consecuencia inmediata de lo anterior tenemos que Λ es básica. En efecto, tenemos la correspondencia uno a uno ya invocada entre las clases de isomorfía de los Λ-módulos simples y las clases de isomorfía de los Λ-módulos proyectivos inescindibles. Como vimos en la sección 1.2, éstas últimas son las clases de isomorfía de los módulos que aparecen en la descomposición de Λ en inescindibles: $\Lambda = \Lambda\bar{\tau}_1 \oplus \ldots \oplus \Lambda\bar{\tau}_n$, de donde se sigue que Λ es básica. //

5.1.2 También se sigue de la descripción de los simples que una representación de (C,R), $M = ((M_i),(f_\alpha))$ es semisimple si y sólo si cada f_α es cero.

De hecho, M es semisimple si y sólo si

$M \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} (\dim_k M_i)S_i$. //

5.2 DESCRIPCION DE LOS MODULOS PROYECTIVOS INESCINDIBLES

Bastará traducir cada $\Lambda\bar{\tau}_i$ a una representación

$$P_i = ((P_i)_j, (f_\alpha))$$

de (C,R) mediante la equivalencia F descrita en (A) de la sección 4.3.

Se obtiene enseguida que:

$$(P_i)_j = \bar{\tau}_j A \bar{\tau}_i = (\tau_j kC\tau_i)/(\tau_j R\tau_i).$$

5.2.1 En caso de que $R = 0$, ó, más generalmente si no hay relaciones legibles de i a j, $(P_i)_j$ resulta ser el k-espacio vectorial con base todos los caminos dirigidos de i a j en C.

Si $R \neq 0$ y si existe una relación legible que va del vértice i al vértice j, $(P_i)_j$ es un espacio vectorial de dimensión estrictamente menor al número de caminos de i a j.

Para cada flecha α: $j \longrightarrow s$ de C, la aplicación lineal

$$f_\alpha: \tau_j kC\tau_i/\tau_j R\tau_i \longrightarrow \tau_s kC\tau_i/\tau_s R\tau_i$$

es tal que $f_\alpha(\bar{\gamma}) = \overline{\alpha\gamma}$ para todos los caminos γ de i a j.

Si $R = 0$, f_α es siempre inyectiva, pero si $R \neq 0$ f_α puede ser o no ser inyectiva.

Veamos un ejemplo. Consideremos el carcaj con relaciones (C,R) de 2.3 (c).

Los kC/R-módulos simples corresponden a $S_1, \ldots, S_6$ donde S_i es la representación con el campo k en el vértice i y 0 en los demás vértices. Por ejemplo:

$$S_4 = \begin{tikzcd} & 0 \arrow[dr] & & 0 \arrow[dl] \\ 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & k \arrow[dr] & \\ & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[uu] \end{tikzcd} .$$

Daremos ahora la lista de los proyectivos inescindibles.

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & & k \arrow[dr, "1"] & & 0 \arrow[dl] \\ P_1 = & k \arrow[ur, "1"] \arrow[dr, "1"'] & & k \arrow[dr] & \\ & & k \arrow[ur, "1"'] & & 0 \arrow[uu] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & & k \arrow[dr, "1"] & & 0 \arrow[dl] \\ P_2 = & 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & k \arrow[dr] & \\ & & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[uu] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & & 0 \arrow[dr] & & k \arrow[dl, "0"'] \\ P_3 = & 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & k \arrow[dr, "1"'] & \\ & & k \arrow[ur, "1"'] & & k \arrow[uu, "1"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & & 0 \arrow[dr] & & k \arrow[dl, "0"'] \\ P_4 = & 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & k \arrow[dr, "1"'] & \\ & & 0 \arrow[ur] & & k \arrow[uu, "1"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & & 0 \arrow[dr] & & k\oplus k \arrow[dl, "{(1,0)}"'] \\ P_5 = & 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & k \arrow[dr, "1"'] & \\ & & 0 \arrow[ur] & & k \arrow[uu, "\binom{0}{1}"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & & 0 \arrow[dr] & & k\oplus k \arrow[dl, "{(1,0)}"'] \\ P_6 = & 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & k \arrow[dr, "\binom{0}{1}"'] & \\ & & 0 \arrow[ur] & & k\oplus k \arrow[uu, "1 = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)"'] \end{tikzcd}$$

§5.3 DESCRIPCION DE $\mathrm{rad}^m P_i$

Nos ocuparemos primero de describir $\mathrm{rad}P_i$.

Como en 5.2, bastará traducir $\mathrm{rad}(\Lambda\bar{\tau}_i)$ a una representación, que llamaremos

$$\mathrm{rad}P_i = ((\mathrm{rad}P_i)_j, (g_\alpha)) ,$$

mediante la equivalencia F.

Recordemos que, por un lado, $\mathrm{rad}(\Lambda\bar{\tau}_i) = (\mathrm{rad}\Lambda)\bar{\tau}_i$. Por otro lado $\mathrm{rad}\Lambda = \bar{F}$, ya que R es admisible (ver 2.3.4).

Obtenemos entonces que

$$(\mathrm{rad}P_i)_j = \bar{\tau}_j\bar{F}\bar{\tau}_i = \tau_j F\tau_i/\tau_j R\tau_i .$$

5.3.1 Es inmediato que, en caso de que $i \neq j$, $\tau_j F\tau_i = \tau_j kC\tau_i$, de donde

$$(\mathrm{rad}P_i)_j = (P_i)_j \quad \text{si } i \neq j.$$

Notemos también que, para $i = j$, $(P_i)_i = \tau_i kC\tau_i/\tau_i R\tau_i = k\bar{\tau}_i \oplus \tau_i F\tau_i/\tau_i R\tau_i$; esto se debe a que $R \subseteq F^2 \subseteq F$ y muestra que

$$\dim_k(\mathrm{rad}P_i)_i = \dim_k(P_i)_i - 1,$$

lo que corresponde a haber eliminado el camino trivial τ_i.

Nótese que si C no tiene ciclos dirigidos que pasen por el vértice i, $(\mathrm{rad}P_i)_i = 0$.

Para cada flecha $\alpha: j \longrightarrow s$ en C, tenemos claramente que g_α es la restricción de f_α (ver ejercicio 4.A (b)).

Como ilustración de esto daremos la lista de los radicales de los proyectivos calculados en la sección anterior:

$$\mathrm{rad}P_1 = \begin{tikzcd}[row sep=small]
 & k \arrow[dr, "1"] & & 0 \arrow[dl] \\
0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & k \arrow[dr] & \\
 & k \arrow[ur, "1"'] & & 0 \arrow[uu]
\end{tikzcd}$$

$$\mathrm{rad}P_2 = \begin{tikzcd}[row sep=small]
 & 0 \arrow[dr] & & 0 \arrow[dl] \\
0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & k \arrow[dr] & \\
 & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[uu]
\end{tikzcd} \quad (= S_4)$$

$$\mathrm{rad}P_3 = \begin{tikzcd}[row sep=small]
 & 0 \arrow[dr] & & k \arrow[dl, "0"'] \\
0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & k \arrow[dr, "1"'] & \\
 & 0 \arrow[ur] & & k \arrow[uu, "1"']
\end{tikzcd} \quad (= P_4)$$

$$\mathrm{rad}P_4 = \begin{tikzcd}[row sep=small]
 & 0 \arrow[dr] & & k \arrow[dl] \\
0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & 0 \arrow[dr] & \\
 & 0 \arrow[ur] & & k \arrow[uu, "1"']
\end{tikzcd}$$

$$\mathrm{rad}P_5 = \begin{tikzcd}[row sep=small]
 & 0 \arrow[dr] & & k \arrow[dl, "0"'] \\
0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & k \arrow[dr, "1"'] & \\
 & 0 \arrow[ur] & & k \arrow[uu, "1"']
\end{tikzcd} \quad (= P_4)$$

$$\mathrm{rad}P_6 = \begin{tikzcd}[row sep=small]
 & 0 \arrow[dr] & & k \oplus k \arrow[dl, "{(1,0)}"'] \\
0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & k \arrow[dr, "1"'] & \\
 & 0 \arrow[ur] & & k \arrow[uu, "\binom{0}{1}"']
\end{tikzcd} \quad (= P_5)$$

Veamos ahora el caso en que $m \geq 2$. Igual que antes, se obtiene que:

$$(\mathrm{rad}^m P_i)_j = \bar{\tau}_j \bar{F}^m \bar{\tau}_i = \tau_j (F^m + R)\tau_i / \tau_j R \tau_i .$$

Tenemos entonces que $(\mathrm{rad}^m P_i)_j$ es el subespacio vectorial de $(P_i)_j$ generado por las clases de los caminos de i a j con longitud mayor o igual a m.

En cuanto a la evaluación de $\mathrm{rad}^m P_i$ en cada flecha α, se trata claramente de la restricción de f_α a los subespacios correspondientes.

5.3.2 En caso de que $m = 2$, podemos ser más precisos: Si $j \neq i$, $(P_i)_j = \tau_j kC\tau_i / \tau_j R \tau_i = (\tau_j F^2 \tau_i / \tau_j R \tau_i) \oplus (\bigoplus_\gamma k\bar{\gamma})$, donde γ recorre las flechas de i a j; esto se debe a que $R \subseteq F^2$. Se deduce que, si $\#(i,j)$ es el número de flechas de i a j,

$$\dim_k (\mathrm{rad}^2 P_i)_j = \dim_k (P_i)_j - \#(i,j) \quad \text{si } i \neq j.$$

Para $j = i$, tenemos que $(P_i)_i = \tau_i kC\tau_i / \tau_i R \tau_i =$ $= \tau_i F^2 \tau_i / \tau_i R \tau_i \oplus k\bar{\tau}_i \oplus (\bigoplus_\gamma k\bar{\gamma})$, donde γ recorre los lazos en i; en consecuencia:

$$\dim_k (\mathrm{rad}^2 P_i)_i = \dim_k (P_i)_i - [\#(i,i) + 1].$$

§5.4 DESCRIPCION DE LOS MODULOS INYECTIVOS INESCINDIBLES

Por 1.E sabemos que si $P_1{}^*, P_2{}^*, \ldots, P_n{}^*$ son los proyectivos inescindibles de $\mathrm{mod}\Lambda^{op}$, entonces $D(P_1{}^*), \ldots, D(P_n{}^*)$ son los inyectivos inescindibles de $\mathrm{mod}\Lambda$, donde $D: \mathrm{mod}\Lambda^{op} \longrightarrow \mathrm{mod}\Lambda$ es la dualidad de 1.E. (Intercambiando Λ por Λ^{op} en 1.E).

Por 5.2 sabemos cuáles representaciones de (C^*, R^*) co rresponden a $P_1^*,\dots,P_n^*$, de modo que bastará aplicarles la dualidad $D\colon \mathrm{mod}(C^*,R^*) \longrightarrow \mathrm{mod}(C,R)$ descrita en 4.E.(Ahora hay que intercambiar (C,R) y (C^*,R^*) en 4.E).

Pongamos entonces

$$I_j := D(P_j^*) =: ((I_j)_i, (f_\alpha)).$$

Se obtiene, haciendo lo anteriormente dicho, que:

$$(I_j)_i = (P_j^*)_i^* = (\tau_i kC^*\tau_j/\tau_i R^*\tau_j)^* = (\tau_j kC\tau_i/\tau_j R\tau_i)^* \simeq \tau_j kC\tau_i/\tau_j R\tau_i\,.$$

En caso de que $R = 0$, $(I_j)_i$ es el k-espacio vectorial con base todos los caminos de i a j.

Si $R \neq 0$ y existe una relación legible de R que vá del vértice i al j, la k-dimensión de $(I_j)_i$ es estrictamente menor que el número de caminos dirigidos de i a j.

Para cada flecha $\alpha\colon i \longrightarrow s$ en C, la aplicación lineal

$$f_\alpha\colon \tau_j kC\tau_i/\tau_j R\tau_i \longrightarrow \tau_j kC\tau_s/\tau_j R\tau_s$$

queda descrita por su acción en los generadores de $(I_j)_i$ como sigue:

Si γ es un camino de i a j, entonces:

$$f_\alpha(\bar{\gamma}) = \begin{cases} \bar{\gamma}' & \text{si existe un camino } \gamma' \text{ de } s \text{ a } j \\ & \text{tal que } \gamma = \gamma'\alpha \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Como ilustración, consideremos nuevamente el ejemplo de 5.2. Daremos la lista de los inyectivos inescindibles.

$$I_1 = \begin{tikzcd}[row sep=small] & 0 \arrow[dr] & & 0 \arrow[dl] \\ k \arrow[ur] \arrow[dr] & & 0 \arrow[dr] & \\ & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[uu] \end{tikzcd} \quad (= S_1)$$

$$I_2 = \begin{tikzcd}[row sep=small] & k \arrow[dr] & & 0 \arrow[dl] \\ k \arrow[ur, "1"] \arrow[dr] & & 0 \arrow[dr] & \\ & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[uu] \end{tikzcd}$$

$$I_3 = \begin{tikzcd}[row sep=small] & 0 \arrow[dr] & & 0 \arrow[dl] \\ k \arrow[ur] \arrow[dr, "1"'] & & 0 \arrow[dr] & \\ & k \arrow[ur] & & 0 \arrow[uu] \end{tikzcd}$$

$$I_4 = \begin{tikzcd}[row sep=small] & k \arrow[dr, "1"] & & k \arrow[dl, "1"'] \\ k \arrow[ur, "1"] \arrow[dr, "1"'] & & k \arrow[dr, "0"'] & \\ & k \arrow[ur, "1"'] & & k \arrow[uu, "1"'] \end{tikzcd}$$

$$I_5 = \begin{tikzcd}[row sep=small] & 0 \arrow[dr] & & k\oplus k \arrow[dl, "{(1,0)}"'] \\ 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & k \arrow[dr, "{\binom{0}{1}}"'] & \\ & k \arrow[ur] & & k\oplus k \arrow[uu, "1"'] \end{tikzcd}$$

$$I_6 = \begin{tikzcd}[row sep=small] & 0 \arrow[dr] & & k \arrow[dl, "1"'] \\ 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & k \arrow[dr, "{\binom{1}{0}}"'] & \\ & k \arrow[ur, "1"'] & & k\oplus k \arrow[uu, "{(0,1)}"'] \end{tikzcd}$$

EJERCICIOS DEL CAPITULO 5

5.A (1) Calcule los radicales cuadrados de los proyectivos encontrados en el ejemplo 5.2.

(2) Sea C el siguiente carcaj

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[d, "\alpha"] & 4 \arrow[d, "\delta"] \\
2 \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\beta"] & 5 \arrow[d, "\varepsilon"] \\
3 & 6
\end{tikzcd}$$

y consideremos las relaciones $\varepsilon\gamma = 0$, $\varepsilon\delta = 0$. Describa los simples, los proyectivos inescindibles, sus radicales cuadrados y los inyectivos inescindibles.

5.B Sea (C,R) el carcaj con relaciones de 2.D. Pruebe que:

(1) $\{\bar{\gamma}$ / γ es camino de i a j de longitud menor que $\ell(i)\}$ es base de $(P_i)_j$ y de $(I_j)_i$.

(2) El único submódulo simple de P_i es S_j, donde $j + 1 \equiv i + \ell(i) \bmod n$.

5.C Un vértice i de C es un <u>pozo</u> de C si ninguna flecha de C se inicia en i. Dualmente, diremos que i es una <u>fuente</u> de C si ninguna flecha de C finaliza en i. Para un carcaj con relaciones (C,R) arbitrario,

(1) Demuestre que el proyectivo P_i es simple si y sólo si i es un pozo de C.

(2) Demuestre que el inyectivo I_j es simple si y sólo si j es una fuente de C.

(3) Caracterice los vértices i tales que P_i tiene radical simple.

5.D (1) La cubierta proyectiva del simple S_i es P_i.

(2) Dualice el concepto de cubierta proyectiva para obtener el de "cápsula inyectiva" (el dual de un epimorfismo superfluo se llama "monomorfismo esencial"). Pruebe que la cápsula inyectiva del simple S_j es I_j.

5.E Usando 5.1.2 y las fórmulas de 5.3 pruebe que

$$\mathrm{rad}P_i/\mathrm{rad}^2P_i = \bigoplus_{j\in C_0} \#(i,j)S_j,$$

donde por mS debe entenderse la suma directa de m copias de S (si $m = 0$, $mS := 0$). Concluya que la cubierta proyectiva de $\mathrm{rad}P_i/\mathrm{rad}^2P_i$ es $\bigoplus_{j\in C_0} \#(i,j)P_j$.

5.F En la situación de 5.B pruebe que P_i es inyectivo si y sólo si $\gamma_i^{\ell(i)-1}$ es el más largo camino que llega a j y que no está en R. (Esta j es la de 5.B(2)). Sugerencia:

P_i es inyectivo si y sólo si $P_i \simeq I_j$, pero en todo caso se tiene un monomorfismo ϕ: $P_i \hookrightarrow I_j$. Si se cumple la condición, pruebe que $\gamma_i^{\ell} \longmapsto \gamma_x^{\ell'}$ define, para todo $x \in C_0$, una biyección de la base de $(P_i)_x$ a la de $(I_j)_x$, donde $\ell' = \ell(i) - (\ell + 1)$. Recíprocamente, si ϕ es isomorfismo se tendrá, en particular, que $(P_i)_{i'} \simeq (I_j)_{i'}$, donde i' es el origen de la única flecha que llega a i.

5.G Un conocido resultado de M. Auslander nos asegura que si

Λ es un anillo artiniano podemos calcular su dimensión global proyectiva como el supremo de las dimensiones proyectivas de los Λ-módulos simples (ver [J1], p. 56). Calcule la dimensión global proyectiva de $\Lambda = kC/R$ para (C,R) igual a:

(1) el carcaj con relaciones de 5.A(2).

(2) el carcaj $C = 1 \to 2 \to \ldots \to n$ sin relaciones (i.e. $R = 0$).

(3) el carcaj

$$C = \begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ 2 \arrow[dr] & & 3 \arrow[dl] \\ & 4 & \end{tikzcd}$$

con la relación de conmutatividad.

(4) el carcaj de 2.D con $R = F^m$, $m \geq 2$. En este caso, pruebe que la dimensión global proyectiva es infinita .

<u>5.H</u> (1) Supongamos que Λ es de radical cuadrado cero (ver 3.F). Pruebe que la dimensión global proyectiva de Λ es el supremo de las longitudes de los caminos dirigidos en C. En particular un álgebra Λ con radical cuadrado cero tiene dimensión global proyectiva finita si y sólo si es cociente de hereditaria (ver 6.2).

(2) Pruebe que si C no tiene ciclos dirigidos, la dimensión global proyectiva de Λ está acotada por la longitud del más largo camino dirigido en C.

<u>5.I</u> Sea C un carcaj arbitrario con n vértices.

(1) Usando 4.D(1), pruebe que si C tiene algún ciclo dirigido, entonces hay más de n simples en Mod(kC).

(2) Usando el concepto de anillo semiperfecto ([A-F], p. 303) y el Teorema 27.10 de [A-F] (p. 306), deduzca de (1) que si radkC = F, entonces C no tiene ciclos dirigidos. (Comparar con 2.2.4).

CAPITULO 6: CASOS PARTICULARES

Sea (C,R) un carcaj con relaciones y sea $\Lambda = kC/R$. Dada alguna familia de álgebras definida por alguna propiedad $\mathbb{P}$, quisiéramos encontrar la "traducción" $\mathbb{P}'$ de $\mathbb{P}$ en términos de carcajes con relaciones, o sea que quisiéramos encontrar $\mathbb{P}'$ tal que Λ tiene la propiedad $\mathbb{P}$ si y sólo si (C,R) tiene la propiedad $\mathbb{P}'$. En otras palabras, nos preguntamos qué efecto tiene sobre (C,R) la imposición de condiciones adicionales sobre Λ.

Un ejemplo de esto ya lo hemos visto en 3.F: Λ tiene radical cuadrado cero si y sólo si $R = F^2$.

En este capítulo estudiaremos el problema mencionado en algunos casos particulares.

§6.1 ALGEBRAS HEREDITARIAS

Definición: Diremos que Λ es hereditaria si los submódulos de Λ-módulos proyectivos son siempre proyectivos.

Esto es equivalente a pedir que la dimensión global proyectiva de Λ sea menor o igual a uno y, por lo dicho en 5.G, podemos concluir que Λ es hereditaria si y sólo si el radical de todo proyectivo inescindible es proyectivo.

Como ya conocemos los proyectivos inescindibles y sus radicales, nos será fácil interpretar la afirmación "Λ es hereditaria" en términos de (C,R). Para esto utilizaremos la siguiente propiedad de las álgebras hereditarias: todo morfismo no nulo entre proyectivos inescindibles es monomorfismo (ver 6.D(1)).

Proposición: *Λ es hereditaria si y sólo si C no tiene ciclos dirigidos y $R = 0$.*

Demostración:

Necesidad: Supongamos que Λ es hereditaria.

Si tuviésemos un ciclo en C, digamos $\gamma = (i|\alpha_n \dots \alpha_1|i)$ con $n \geq 1$, obtendríamos, como en 2.B(2), monomorfismos entre proyectivos inescindibles $\phi_{\alpha_n}, \phi_{\alpha_{n-1}}, \dots, \phi_{\alpha_1}$ de tal forma que la composición $\phi = \phi_{\alpha_n}\phi_{\alpha_{n-1}} \dots \phi_{\alpha_1}$ sería un automorfismo $\phi \colon P_i \longrightarrow P_i$.

Por otra parte, como $n \geq 1$, resulta $\phi \in \mathrm{rad}(\mathrm{End}_\Lambda P_i)$: en efecto, $P_i = \Lambda\bar{\tau}_i$ y ϕ es la multiplicación por $\bar{\gamma}$; mediante el isomorfismo $\mathrm{End}P_i \cong \bar{\tau}_i\Lambda\bar{\tau}_i$ de 1.2.6(ii), ϕ se transforma en el elemento $\bar{\gamma}$ de $\bar{\tau}_i\Lambda\bar{\tau}_i$, pero $\bar{\gamma}$ está en $\mathrm{rad}(\bar{\tau}_i\Lambda\bar{\tau}_i)$ por 1.A y 2.3.4.

Entonces ϕ es al mismo tiempo nilpotente e invertible, lo cual es una contradicción. Concluímos que C no tiene ciclos dirigidos.

Si fuera $R \neq 0$, tendríamos dos vértices i,j de C y alguna relación legible ρ de i a j en R.

Como C no tiene ciclos, deberá ser $i \neq j$. También por la ausencia de ciclos dirigidos en C, podemos suponer que ρ es una relación "extrema", o sea que si tenemos algún camino dirigido desde i a algún otro vértice $s \neq i$, ya no empiezan relaciones legibles en s.

Consideremos el proyectivo P_i en mod(C,R). Por 5.E, la cubierta proyectiva de $radP_i/rad^2P_i$ es

$$P = \bigoplus_{t=1}^{r} \#(i,j_t)P_{j_t},$$

donde $j_1, j_2, \ldots, j_r$ son todos los vértices a los que llega alguna flecha desde i. Por nuestra demostración de 1.7.3, P es también la cubierta proyectiva de $radP_i$.

Pero el mismo $radP_i$ es proyectivo, de modo que debe coincidir con su propia cubierta proyectiva (la identidad es ciertamente un epimorfismo superfluo, ahora use la unicidad de la cubierta proyectiva, 1.6.2), de donde

$$\text{(i)} \quad radP_i \cong \bigoplus_{t=1}^{r} \#(i,j_t)P_{j_t} ,$$

y de aquí obtendremos nuestra contradicción.

Si suponemos $\#[x,y]$ igual al número de caminos dirigidos de x a y, obtendremos que

$$\text{(ii)} \quad \#[i,j] = \sum_{t=1}^{r} \#(i,j_t)\#[j_t,j] .$$

Por 5.2.1 y la extremalidad de ρ se tiene que, para toda $t = 1,\ldots,r$,

$$\text{(iii)} \quad \dim_k(P_{j_t})_j = \#[j_t,j].$$

Como $i \neq j$, 5.3.1 nos asegura que:

$$\text{(iv)} \quad \dim_k(radP_i)_j = \dim_k(P_i)_j .$$

Como ρ es una relación legible de i a j, usando 5.2.1 obtenemos que

$$\text{(v)} \quad \dim_k(P_i)_j < \#[i,j].$$

De (i), (iii) y (ii) se obtiene que $\dim_k(radP_i)_j$ es igual a $\#[i,j]$, pero de (iv) y (v) se obtiene que es menor.

Concluímos entonces que $R = 0$.

<u>Suficiencia</u>: Supongamos ahora que C no tiene ciclos dirigidos y que $R = 0$. Probaremos que Λ es hereditaria.

Como $R = 0$, por 2.E podemos ver a $\Lambda = kC$ como el álgebra tensorial $\Lambda = T_A(M)$.

Como $A = k^{C_0}$ es semisimple, todo A-módulo es proyectivo, pero entonces todo Λ-módulo de la forma $\Lambda \otimes_A X$, con X en $\mathrm{Mod}A$, es proyectivo: en efecto, el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda \otimes_A X, -) \simeq \mathrm{Hom}_A(X, \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda, -)) \simeq \mathrm{Hom}_A(X, -)$ es exacto. (Hemos usado la adjunción entre Hom y $\otimes$, para una prueba puede verse la p. 225 de [A-F]).

En particular, para $X = M$, tenemos que $\Lambda \otimes_A M$ es un Λ-módulo proyectivo, pero como C no tiene ciclos dirigidos sabemos por (c) y (d) de 2.E que $\Lambda \otimes_A M \simeq \mathrm{rad}\Lambda$, de donde $\mathrm{rad}\Lambda$ es proyectivo.

Si $P_i = \Lambda\tau_i$ es un proyectivo inescindible, $\mathrm{rad}P_i = \mathrm{rad}(\Lambda\tau_i) = (\mathrm{rad}\Lambda)\tau_i$ es proyectivo por ser sumando directo de $\mathrm{rad}\Lambda$, de donde Λ es hereditaria. //

§6.2 ALGEBRAS COCIENTES DE HEREDITARIAS

Veremos ahora que si se omite la condición "$R = 0$" para las álgebras hereditarias, se obtiene una familia importante de álgebras: las álgebras cocientes de hereditarias (ver [Hr], [J-N]).

<u>Definición</u>: Λ es <u>cociente de hereditaria</u> si existe una k-ál-

gebra Γ de dimensión finita y hereditaria y un morfismo supra yectivo $\phi: \Gamma \longrightarrow \Lambda$ de k-álgebras tal que $\text{Ker}\phi \subseteq \text{rad}^2\Gamma$.

Observaciones: En la situación de la definición anterior, se tiene lo siguiente:

(1) La condición $\text{Ker}\phi \subseteq \text{rad}^2\Gamma$ equivale a pedir que $\phi^{-1}\text{rad}^2\Lambda = \text{rad}^2\Gamma$, ó a pedir que ϕ induzca un isomorfismo de k-álgebras $\bar{\phi}: \Gamma/\text{rad}^2\Gamma \longrightarrow \Lambda/\text{rad}^2\Lambda$ (ver 1.C).

(2) Como Λ es básica e indescomponible, por ser $\text{Ker}\phi \subseteq \text{rad}^2\Gamma$, Γ también es básica e indescomponible. (ver 6.A).

Proposición: *Λ es cociente de hereditaria si y sólo si C no tiene ciclos dirigidos.*

Demostración: Si C no tiene ciclos dirigidos, kC es hereditaria por la proposición anterior, y si $\phi: kC \longrightarrow \Lambda = kC/R$ es la proyección natural, $\text{Ker}\phi = R \subseteq F^2$ por ser R admisible y $F^2 = \text{rad}^2 kC$ por 2.2.4, de modo que Λ es cociente de hereditaria.

Supongamos ahora que Λ es cociente de hereditaria. Entonces existe un morfismo sobre $\phi: \Gamma \longrightarrow \Lambda$ de k-álgebras con Γ hereditaria y $\text{Ker}\phi \subseteq \text{rad}^2\Gamma$.

Por la observación (2), podemos considerar al carcaj de Γ, C_Γ. Por la proposición anterior obtendremos entonces que C_Γ no tiene ciclos dirigidos.

Sabemos que $C = C_\Lambda$ (3.1.3), pero $C_\Lambda = C_\Gamma$ por 3.F, de donde C no tiene ciclos dirigidos. //

gebra Γ de dimensión finita y hereditaria y un morfismo suprayectivo $\phi: \Gamma \longrightarrow \Lambda$ de k-álgebras tal que $\mathrm{Ker}\phi \subseteq \mathrm{rad}^2\Gamma$.

<u>Observaciones</u>: En la situación de la definición anterior, se tiene lo siguiente:

(1) La condición $\mathrm{Ker}\phi \subseteq \mathrm{rad}^2\Gamma$ equivale a pedir que $\phi^{-1}\mathrm{rad}^2\Lambda = \mathrm{rad}^2\Gamma$, ó a pedir que ϕ induzca un isomorfismo de k-álgebras $\bar{\phi}: \Gamma/\mathrm{rad}^2\Gamma \longrightarrow \Lambda/\mathrm{rad}^2\Lambda$ (ver 1.C).

(2) Como Λ es básica e indescomponible, por ser $\mathrm{Ker}\phi \subseteq \mathrm{rad}^2\Gamma$, Γ también es básica e indescomponible. (ver 6.A).

<u>Proposición</u>: *Λ es cociente de hereditaria si y sólo si* C *no tiene ciclos dirigidos.*

<u>Demostración</u>: Si C no tiene ciclos dirigidos, kC es hereditaria por la proposición anterior, y si $\phi: kC \longrightarrow \Lambda = kC/R$ es la proyección natural, $\mathrm{Ker}\phi = R \subseteq F^2$ por ser R admisible y $F^2 = \mathrm{rad}^2 kC$ por 2.2.4, de modo que Λ es cociente de hereditaria.

Supongamos ahora que Λ es cociente de hereditaria. Entonces existe un morfismo sobre $\phi: \Gamma \longrightarrow \Lambda$ de k-álgebras con Γ hereditaria y $\mathrm{Ker}\phi \subseteq \mathrm{rad}^2\Gamma$.

Por la observación (2), podemos considerar al carcaj de Γ, C_Γ. Por la proposición anterior obtendremos entonces que C_Γ no tiene ciclos dirigidos.

Sabemos que $C = C_\Lambda$ (3.1.3), pero $C_\Lambda = C_\Gamma$ por 3.F, de donde C no tiene ciclos dirigidos. //

§6.3 ALGEBRAS SERIALES IZQUIERDAS

Definición: Λ es serial izquierda si todo proyectivo inescindible en modΛ tiene una única serie de composición.

Recordemos que una serie de composición para un Λ-módulo M es una cadena de submódulos $M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_\ell = 0$ con la propiedad de que M_i/M_{i+1} es simple para $i = 0,1,\ldots,\ell-1$. Como Λ es un anillo artiniano, todo Λ-módulo izquierdo finitamente generado tiene alguna serie de composición, lo que se exige es que los proyectivos inescindibles la tengan única (o sea, que los proyectivos inescindibles sean uniseriales).

Observemos que un Λ-módulo M tiene una única serie de composición si y sólo si $M \supset \mathrm{rad}M \supset \mathrm{rad}^2M \supset \ldots \supset 0$ es una serie de composición.

6.3.1 Lema: *Supongamos que* $\mathrm{rad}P/\mathrm{rad}^2P$ *es simple o cero para cada Λ-módulo proyectivo inescindible* P. *Entonces Λ es serial izquierda.*

Demostración: Sea P un proyectivo inescindible en modΛ. Por hipótesis sabemos que $\mathrm{rad}P/\mathrm{rad}^2P$ es simple o cero. Suponiendo que $\mathrm{rad}P/\mathrm{rad}^2P$ es simple, probaremos que $\mathrm{rad}^2P/\mathrm{rad}^3P$ es también simple o cero.

Sea $f\colon Q \longrightarrow \mathrm{rad}P$ la cubierta proyectiva de radP. Como $\mathrm{rad}P/\mathrm{rad}^2P$ es simple y Q es también la cubierta proyectiva de $\mathrm{rad}P/\mathrm{rad}^2P$, entonces Q es un proyectivo inescindible.

Usando 1.5.5, vemos que f puede restringirse a epimor fismos $f'\colon \mathrm{rad}Q \longrightarrow \mathrm{rad}^2P$ y $f''\colon \mathrm{rad}^2Q \longrightarrow \mathrm{rad}^3P$, de modo que f induce un epimorfismo $\bar{f}\colon \mathrm{rad}Q/\mathrm{rad}^2Q \longrightarrow \mathrm{rad}^2P/\mathrm{rad}^3P$ que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{rad}^2Q \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & \mathrm{rad}Q \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & \mathrm{rad}Q/\mathrm{rad}^2Q \arrow[r] \arrow[d, "\bar{f}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{rad}^3P \arrow[r] & \mathrm{rad}^2P \arrow[r] & \mathrm{rad}^2P/\mathrm{rad}^3P \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Pero por hipótesis, ya que Q es proyectivo inescindible, $\mathrm{rad}Q/\mathrm{rad}^2Q$ es simple o cero, de modo que $\mathrm{rad}^2P/\mathrm{rad}^3P$ es también simple o cero.

Nuevamente, si $\mathrm{rad}^2P/\mathrm{rad}^3P$ es simple, podemos emplear la misma técnica ("Sea $T \longrightarrow \mathrm{rad}^2P$ la cubierta proyectiva de rad^2P, etc.") para probar que $\mathrm{rad}^3P/\mathrm{rad}^4P$ es simple o cero y así continuamos durante un número finito de pasos (igual a la longitud de P) hasta encontrar un cociente nulo.

Con esto se habrá probado que $P \supset \mathrm{rad}P \supset \mathrm{rad}^2P \supset \ldots \supset 0$ es una serie de composición, de modo que P es uniserial.//

<u>6.3.2</u> <u>Proposición</u>: *Λ es serial izquierda si y sólo si para cada vértice* i *de* C *hay a lo más una flecha que empieza en* i.

<u>Demostración</u>: Supongamos primero que Λ es serial izquierda. Sea i un vértice de C y consideremos el proyectivo P_i. Como P_i es uniserial, $P_i \supset \mathrm{rad}P_i \supset \mathrm{rad}^2P_i \supset \ldots \supset 0$ es serie de composición, y entonces $\mathrm{rad}P_i/\mathrm{rad}^2P_i$ es simple o cero. Por 5.E se tiene entonces que $\bigoplus_{j \in C_0} \#(i,j)S_i$ es simple o cero. Por lo tanto, hay a lo más una flecha en C que empieza en i.

Ahora supongamos, recíprocamente, la condición del enunciado. Sea i un vértice cualquiera de C. Por hipótesis y 5.E se tiene que $radP_i/rad^2P_i$ es simple o cero. En consecuencia, aplicando 6.3.1, Λ es serial izquierda. //

§6.4 ALGEBRAS DE NAKAYAMA

Definición: Λ es serial derecha si todo Λ-módulo derecho proyectivo e inescindible es uniserial.

Observemos que, como $\mathrm{mod}\Lambda^{op}$ es equivalente a la categoría de los Λ-módulos derechos, Λ es serial derecha si y sólo si Λ^{op} es serial izquierda. Como el carcaj de Λ^{op} es $C_\Lambda{}^*$, el opuesto al de Λ (ver 3.G), se obtiene la siguiente versión de 6.3.2:

6.4.1 Proposición: *Λ es serial derecha si y sólo si para cada vértice* i *de* C *hay a lo más una flecha de* C *que termina en* i.//

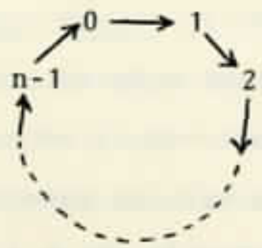
Definición: Λ es un álgebra de Nakayama si es serial izquierda y serial derecha.

De la definición y nuestras dos últimas proposiciones obtenemos:

6.4.2 Proposición: *Λ es de Nakayama si y sólo si en cada vértice de* C *empieza a lo más una flecha y termina a lo más una* *flecha. En concecuencia* Λ *es de Nakayama si y sólo si* C *es uno de los siguientes carcajes:*

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow n \quad (n \geq 1)$$

ó



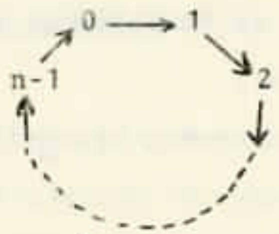
$(n \geq 1)$.

Nótese que cuando $n = 1$, *el primer carcaj es solo un punto* ($\Lambda = k$) *y el segundo es un vértice con un lazo.* //

<u>Definición</u>: Λ es <u>autoinyectiva</u> si considerada como Λ-módulo izquierdo es inyectiva. (Equivalentemente, si cada proyectivo inescindible es inyectivo).

No conocemos una condición para (C,R) que sea equivalente a la autoinyectividad de Λ, pero para álgebras de Nakayama autoinyectivas esta descripción es fácil. Vimos ya que pedir que Λ sea de Nakayama restringe fuertemente la forma de C, aunque no impone condiciones al ideal admisible R. Veremos ahora que pedir que Λ sea Nakayama-autoinyectiva resringe aún más la forma de C e impone una fuerte condición a R.

<u>6.4.3</u> <u>Proposición</u>: *Si* $\Lambda \neq k$ (*éste es el caso en que* C *es sólo un punto y, forzosamente,* $R = 0$), *entonces* Λ *es Nakayama-autoinyectiva si y sólo si* C *es de la forma*



$(n \geq 1)$

y $R = F^h$ *con alguna* $h \geq 2$.

<u>Demostración</u>: Supongamos que Λ es Nakayama-autoinyectiva. C no puede ser de la forma $1 \longrightarrow 2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow n$ con $n > 1$, pues $\Lambda\bar{\tau}_n$ sería un proyectivo simple no inyectivo (ver 5.C), y por lo tanto C es la forma requerida por 6.4.2. Veremos ahora que $R = F^h$ para alguna $h \geq 2$. Recordemos que, para $n = 1$, ya vimos esto en 2.D; en lo que sigue, usaremos la notación de 2.D.

Sea $h := \max\{\ell(i) \,/\, i = 0,1,\ldots,n-1\}$. Ciertamente, $h \geq 2$ (R es admisible) y, como $\{\gamma_i^{\ell(i)} \,/\, i = 0,\ldots,n-1\}$ es un sistema de generadores para R, nos bastará con probar que $\ell(0) = \ell(1) = \ldots = \ell(n-1) = h$ para tener que $R = F^h$.

Razonaremos por contradicción, suponiendo que hay un vértice i de C tal que $\ell(i) < h$. Sea $i' \in C_0$ tal que $i' + 1 \equiv i$ mod n (o sea que i' es donde empieza la única flecha que llega a i). Es fácil convencerse de que podemos suponer que $\ell(i') = h$, y de aquí obtendremos nuestra contradicción.

Sea $j \in C_0$ tal que $j + 1 \equiv i + \ell(i)$ mod n. Como P_i es inyectivo, sabemos por 5.F que $\gamma_i^{\ell(i)-1}$ es el más largo camino que llega a j y no está en R. Entonces $\gamma_{i'}^{\ell(i)} \in R$, pues también llega a j y es más largo que $\gamma_i^{\ell(i)-1}$. Por la definición de $\ell(i')$, concluímos que $h = \ell(i') \leq \ell(i) < h$.

Recíprocamente, supongamos que (C,R) es como en el enunciado. Por 6.4.2, Λ es de Nakayama. Por 5.F, P_i es inyectivo para todo vértice i de C, de modo que Λ es autoinyectiva. //

EJERCICIOS DEL CAPITULO 6

6.A Pruebe la observación (2) de 6.2. Sugerencia:

Use 1.C para t = 1. Para la primera parte, pruebe el converso del lema 1 de 3.2.2, y para la segunda use 1.3.3.

6.B Algebras locales. Λ es local si tiene un único ideal izquierdo maximal. Pruebe que Λ es local si y sólo si C tiene un solo vértice (cualquier número de lazos, R arbitrario).

6.C Algebras conmutativas. Pruebe que Λ es conmutativa si y sólo si C tiene un sólo vértice y, si $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ son las flechas de C, $\alpha_i\alpha_j - \alpha_j\alpha_i \in R$ para todo par de índices $i,j \in \{1,\ldots,n\}$.

6.D Algebras ℓ-hereditarias.

(1) Pruebe que si Λ es hereditaria, todo morfismo no nulo entre proyectivos inescindibles es monomorfismo. Esto se usó en la prueba de la proposición de 6.1.

(2) Λ es ℓ-hereditaria (localmente hereditaria) si cumple la condición del inciso anterior. Pruebe que Λ es ℓ-hereditaria si y sólo si todo submódulo local (i.e. con un único submódulo máximo) de un proyectivo inescindible es proyectivo.

(3) Considere la relación transitiva < generada por "$P_i \otimes P_j$ si y sólo si hay un morfismo no nulo de P_i a P_j que

no es isomorfismo". Pruebe que $P_i < P_j$ si y sólo si hay un camino dirigido de j en i, no trivial. Entonces Λ es cociente de hereditaria si y sólo si < es un orden parcial. Concluya que las álgebras ℓ-hereditarias son cocientes de hereditarias.

(4) Si Λ es ℓ-hereditaria, R no puede contener relaciones cero.

(5) Una expresión legible de x a y en C es un elemento no nulo de $\tau_y kC\tau_x$. Nótese que el producto uv de dos expresiones legibles es el cero de kC si y sólo si v termina en un punto distinto del punto inicial de u. Pruebe que $\Lambda = kC/R$ es ℓ-hereditaria si y sólo si:

(i) C no tiene ciclos dirigidos, y

(ii) Si u,v son expresiones legibles con $0 \neq uv \in R$, entonces $u \in R$ ó $v \in R$.

6.E Pruebe que si Λ es serial izquierda, C tiene a lo más un ciclo dirigido. Describa la "forma general" de C cuando no tiene y cuando tiene un ciclo dirigido.

6.F Supongamos que Λ es Nakayama-autoinyectiva. Llamaremos Nakayama-simétrica a Λ si además se satisface que, para cada proyectivo inescindible P, P/radP es el único submódulo simple de P. Pruebe que esto ocurre si y sólo si $h \equiv 1 \bmod n$, donde h es la de 6.4.3.

6.G Pruebe que si Λ es autoinyectiva, cada flecha de C está contenida en algún ciclo dirigido de C. Muestre que el converso no es válido.

APENDICE: ALGEBRAS DE TIPO DE REPRESENTACION FINITO

Si Λ es un anillo artiniano decimos que Λ es de tipo (de representación) finito si sólo hay un número finito de clases de isomorfía de inescindibles en modΛ.

El Teorema de Krull y Schmidt (1.2.1, que vale en general para anillos artinianos) nos garantiza que si Λ es de tipo finito nos bastará con conocer un número finito de módulos para describir explícitamente todos los objetos de modΛ. Pero aún se sabe más: M. Auslander ha probado que *si Λ es de tipo finito, entonces todo Λ-módulo (finitamente generado o no) es suma directa de Λ-módulos inescindibles finitamente generados* (ver [A]). Entonces, conociendo un número finito de Λ-módulos, podríamos describir todos los Λ-módulos.

Uno de los problemas centrales de la Teoría de Representaciones es determinar cuáles son los anillos artinianos de tipo finito. Este problema no ha sido aún resuelto, pero sí se han resuelto casos particulares importantes: para ciertas familias F de anillos artinianos, se han podido clasificar los anillos de tipo finito de F. Algunos de estos resultados se consideran ya como teoremas clásicos del Algebra y otros, más recientes, sólo se encuentran en artículos de investigación destinados al especialista. En este apéndice trataremos de enunciar algunos de estos resultados.

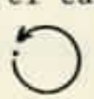
A.1 LOS PRIMEROS EJEMPLOS

El resultado más elemental que afirma que algún anillo es de tipo finito es el conocido teorema: *si* k *es un campo, todo* k-*espacio vectorial tiene una base*, debido esencialmente a G. Hamel (1905).

Ciertamente, Hamel no trataba de atacar la clasificación de los anillos de tipo finito en [Hm]: su interés era clasificar las soluciones de la ecuación funcional $f(x+y) = f(x) + f(y)$ sobre los números reales, y lo que probó es que $\mathbb{R}$ tiene una $\mathbb{Q}$-base. Algo análogo sucede con los resultados que mencionaremos en esta sección y con varios de los que después enunciaremos: no deben verse como intentos de solución parcial al problema que nos ocupa sino como resultados, originalmente inconexos, que posteriormente dieron origen a que se planteara el problema y que han aportado motivación y técnicas para intentar resolverlo.

Los primeros ejemplos relevantes para nosotros son anteriores al trabajo de Hamel, y fueron obtenidos durante la búsqueda de formas canónicas para las matrices. Mencionaremos aquí los dos más sencillos.

Consideremos primero el anillo $\Lambda = k[x]$, donde k es un campo algebraicamente cerrado. Λ no es artiniano, pero sabemos que $\Lambda \cong kC$, donde C es el carcaj

C =  .

Sabemos también que $\mathrm{Mod}\Lambda \simeq \mathrm{Mod}kC \simeq \mathrm{Mod}C$ (ver 4.D), de modo que podemos "ver" los Λ-módulos como parejas (V,f) formadas por un espacio vectorial V y una aplicación lineal $f: V \longrightarrow V$. Si V es de dimensión finita, claramente (V,f) "es" un Λ-módulo finitamente generado; consideremos ahora la subcategoría plena $\mathcal{C}$ de $\mathrm{Mod}(C)$ definida por todos los (V,f) con V de dimensión finita: $\mathcal{C}$ es equivalente a una subcategoría plena de $\mathrm{mod}\Lambda$ que es cerrada bajo la obtención, en $\mathrm{mod}\Lambda$, de sumas finitas y sumandos directos.

A su vez, $\mathcal{C}$ es equivalente a la categoría $\mathcal{C}'$ que a continuación se define: los objetos de $\mathcal{C}'$ son todas las matrices cuadradas M (de cualquier orden) con entradas en k, y los morfismos de M a M' en $\mathcal{C}'$ son todas las matrices A (de $n\times m$ si M es de $m\times m$ y N es de $n\times n$) tales que $AM = M'A$.

Es fácil convencerse de que sucede lo siguiente: Una representación $(V,f) \in \mathcal{C}$ es escindible si y sólo si la correspondiente matriz en $\mathcal{C}'$ es conjugada de alguna matriz M con descomposición diagonal (no trivial) en bloques:

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix}.$$

Se sabe (Jordan, 1870) que *toda matriz cuadrada* M *es conjugada de una matriz* M' *que tiene descomposición diagonal en bloques*

$$M' = \begin{bmatrix} M_1 & & & 0 \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & M_r \end{bmatrix},$$

donde los bloques M_i *son células de Jordan, i.e. matrices cua-*

dradas de la forma

$$M_i = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & & \\ & 0 & \lambda & & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & \lambda \end{bmatrix},$$

con $\lambda \in k$. *Más aún: la matriz M' es única salvo por la colocación de los bloques* M_i *a lo largo de la diagonal.* Además, *toda célula de Jordan es inescindible:* no es conjungada de ninguna matriz que tenga descomposición diagonal en bloques. (Véase [M]).

De lo anterior concluímos que, para nuestra Λ:

(1) Λ es de tipo de representación infinito

(2) Hay una infinidad de números naturales n tales que Λ tiene representaciones inescindibles de longitud n

(3) Hay una infinidad de números naturales n tales que Λ tiene una infinidad de clases de isomorfía de representaciones inescindibles de dimensión n sobre k.

Nótese que cada una de estas condiciones implica la anterior. Diremos que un anillo artiniano que satisface (2) es de <u>tipo</u> (<u>de representación</u>) <u>no acotado</u>, y diremos que una k-álgebra que satisface (3) es de <u>tipo fuertemente no acotado</u>.

Consideremos ahora al carcaj

$$C = \cdot \rightrightarrows \cdot \ ,$$

y sea $\Lambda = kC$. Entonces $\mathrm{mod}\Lambda \simeq \mathrm{mod}kC$ y los Λ-módulos finitamente generados "son" pares de matrices (M,N) de las mismas dimensiones. Tendremos que $(M,N) \simeq (M',N')$ si y sólo si existen matrices no singulares P y Q tales que PM = M'Q y PN = N'Q. Se plantearía entonces el problema de encontrar una forma canónica para parejas de matrices (M,N) bajo esta relación de equivalencia: una forma tal que todo par (M,N) fuera equivalente a uno (M',N') de la forma mencionada (único). También pediríamos a esta forma canónica que se puediese "ver" fácilmente si (M',N') es inescindible o no (como en nuestro ejemplo anterior, en el que basta ver si hay o no una única célula de Jordan).

Este problema fue resuelto en 1896 por Kronecker (ver [Gn]) y la forma canónica por él descubierta nos permite ver que, *para nuestra Λ, Λ es de tipo fuertemente no acotado.*

También a fines del siglo pasado fué demostrado el teorema de Wedderburn para anillos artinianos (ver [A-F]). Con la ayuda de trabajos posteriores (Artin, Hopkins, Krull, etc.), el teorema mencionado puede interpretarse, desde el punto de vista que nos ocupa, como sigue: *si el radical del anillo artiniano Λ es cero (ó sea, si Λ es semisimple), todo Λ-módulo es suma directa de Λ-módulos simples; en particular Λ es de tipo finito.* Como para anillos artinianos la semisimplicidad equivale a que la dimensión homológica sea cero, tenemos otra interpretación del mismo teorema: *si la dimensión homológica del anillo artiniano Λ es cero, entonces Λ es de tipo finito.*

A.2 LA TEORIA DE GRUPOS

En 1898, H. Maschke publicó el primer resultado sobre álgebras de grupo de tipo finito: *si* k *es un campo y la caracte rística de* k *no divide al orden del grupo finito* G, *entonces* kG *es semisimple* (y, por tanto, de tipo finito). En realidad, esta es una versión posterior del Teorema de Maschke, pues él no utilizaba el álgebra de grupo ni veía a las k-representaciones de G como módulos sobre kG.

Quedaba entonces el problema de clasificar los grupos finitos G tales que kG es de tipo finito con k un campo de característica p tal que p|o(G).

En 1939, H. Brummund probó que *si* G *es un* p-*grupo finito y* car(k) = p, *entonces* kG *es de tipo finito si y sólo si* G *es cíclico*. Observó también que *si* kG *es de tipo infinito* (G un p-grupo), *entonces* kG *es de tipo fuertemente no acotado siempre que* k *sea infinito*.

En 1954, D.G. Higman resolvió el caso general: *si la carcaterística de* k *es un divisor* p *del orden de* G, *entonces* kG *es de tipo finito si y sólo si los* p-*subgrupos de Sylow de* G *son cíclicos. Además, si* k *es infinito y* kG *es de tipo infinito,* kG *será de hecho de tipo fuertemente no acotado* (véase [C-R]).

Ha de observarse que para la demostración de los resultados aquí mencionados los métodos diagramáticos no jugaron ningún papel. Es sólo muy recientemente que (aunados a otros métodos que aquí no hemos mencionado) los métodos diagramáticos han resultado útiles para la comprensión de la estructura de las categorías de módulos sobre bloques de álgebras de grupo; sin embargo, no entraremos aquí en detalles sobre esto.

A.3 LAS CONJETURAS DE BRAUER Y THRALL

Como ya dijimos, el caso semisimple fué estudiado a fines del siglo pasado y a principios de este con bastante detenimiento y éxito. A mediados de la década de los 30's, y principalmente gracias a la influencia de los trabajos de R. Brauer sobre representaciones modulares de grupos, se empezó a estudiar a fondo el caso no semisimple. En aquella época ya se estudiaban los anillos y las k-álgebras y se empezaba a hacer énfasis (E. Noether) en el estudio de los módulos.

En 1934, G. Köthe publicó su trabajo [K], que fué de gran influencia en el desarrollo posterior de la Teoría de Representaciones. Se sabe que los anillos artinianos semisimples coinciden con aquéllos sobre los cuales todo módulo es suma de simples; también era ya conocido el Teorema Fundamental de los Grupos Abelianos Finitamente Generados: si G es un grupo abeliano finitamente generado, entonces G es suma directa de grupos cíclicos; incluso ya H. Ulm había estudiado las descomposiciones de grupos abelianos numerablemente generados y de torsión. Köthe se planteó el siguiente problema: ¿cuáles son los anillos artinianos sobre los cuales todo módulo es suma de cíclicos? Al tratar de resolverlo, definió los <u>anillos uniseriales</u>, y probó que *si Λ es uniserial, entonces* *todo Λ-módulo es suma directa de cíclicos, y los cíclicos inescindibles son cocientes de proyectivos inescindibles por potencias de su radical. En particular, los anillos uniseriales son de tipo finito.* También logró demostrar que, para anillos conmutativos, los anillos uniseriales son los únicos con esta propiedad; el problema general quedó abierto.

En 1939, T. Nakayama [N] se planteó y resolvió una versión más restringida del problema de Köthe: ¿cuáles son los anillos artinianos sobre los cuales todo módulo es suma directa de cíclicos que sean, a su vez, cocientes de proyectivos inescindibles por potencias de su radical? La solución dada por Nakayama (primero para k-álgebras, después para anillos artinianos) es: tales anillos son precisamente los anillos <u>uniseriales generalizados</u> (ahora llamados anillos de Nakayama, ver 6.4). En particular, se tiene: *todo anillo de Nakayama es de tipo finito.* En la misma serie de trabajos, Nakayama observó que los argumentos de Brummund (ver A.2) valían en un contexto más general y planteó explícitamente el problema de encontrar los anillos artinianos de tipo no acotado.

Después de estos trabajos es que R. Brauer y R.M. Thrall conjeturaron los siguientes resultados:

BT I: *Todo anillo artiniano de tipo acotado es de tipo finito.*

BT II: *Si k es un campo infinito y Λ es una k-álgebra* *de dimensión finita y de tipo no acotado, entonces Λ es de tipo fuertemente no acotado.*

Estas conjeturas no fueron enunciadas explícitamente sino hasta 1957 (ver [J2]) y, aunque Brauer y Thrall trabajaron sobre ellas mucho tiempo, no lograron demostrarlas. Mucho de lo que se ha hecho después (resultados, técnicas) en Teoría de Representaciones se ha hecho al intentar resolver estas conjeturas (ver [Rn]), y la segunda de ellas es hasta el momento uno de los principales problemas que ocupan a los especialistas.

Los métodos diagramáticos, aunque no como los hemos presentado en esta monografía, hicieron su aparición en los primeros intentos que hubo de resolver las conjeturas (el uso que se hacía de ellos era más bien implícito).

Parece ser que R.M. Thrall ya asociaba cierta gráfica a algunos tipos particulares de álgebras (sin publicarse, pero ver [J2]) y, en 1956, T. Yoshii hacía ya uso (más o menos implícito) del carcaj C_Λ para una k-álgebra Λ de dimensión finita con k algebraicamente cerrado. Yoshii pretendía haber probado BT I para el caso en que el radical cuadrado de Λ fuese cero, y haber dado la lista de las k-álgebras con radical cuadrado cero y de tipo finito. Por desgracia, había errores en su trabajo y sus resultados no son concluyentes.

A.4 DESARROLLOS RECIENTES

En 1968, A.V. Roiter [Rt] probó BT I para álgebras sobre un campo perfecto (en 1974, M. Auslander la probaría para anillos artinianos en [A]). Este resultado, sorprendente por la sencillez de los argumentos, hizo que renaciera el interés por las conjeturas y la clasificación de las álgebras de tipo finito. Varios de los trabajos hechos anteriormente se veían como consecuencias de la validez de BT I; otra consecuencia es que, cualesquiera que sean las álgebras que resuelven el problema de Köthe, son todas de tipo finito (si los inescindibles son todos cíclicos, ciertamente el álgebra es de tipo acotado).

Revisando el trabajo de Yoshii, que había sido citado por Roiter, S.A. Kruglyak y P. Gabriel (trabajando independientemente) descubrieron los errores que antes mencionamos y se replantearon (puesto que BT I estaba ya probada) el problema de clasificar las álgebras de radical cuadrado cero que fueran de tipo finito.

En 1972 S.A. Kruglyak resolvió este problema con técnicas de representaciones de conjuntos parcialmente ordenados, que habían venido siendo estudiadas por Roiter, Nazarova y Kleiner, de la escuela de Kiev.

También en 1972 publicó P. Gabriel su solución al pro blema [Gb]. Es en este trabajo donde se encuentran explícitas por primera vez las "ideas diagramáticas" que han sido objeto de esta monografía, tal y como hoy se conocen. Al rehacer el trabajo de Yoshii en términos diagramáticos, P. Gabriel observó que no sólo se obtenía la lista de las k-álgebras con radical cuadrado cero de tipo finito, sino también la de las k-álgebras hereditarias de tipo finito. Enunciaremos primero este último resultado:

<u>Teorema</u>: *Sea* k *un campo algebraicamente cerrado y sea* Λ *una* k-*álgebra (indescomponible y básica) de dimensión finita. Sea* $C = C_\Lambda$ *el carcaj ordinario de* Λ *y supongamos que* Λ *es hereditaria* (i.e., $\Lambda \cong kC$). *Entonces* Λ *es de tipo finito si y sólo si la gráfica subyacente a* C *(obtenida "olvidando" la orientación de las flechas) es uno de los siguientes diagramas:*

$$A_n: \quad 1 - 2 - \cdots - n \qquad (n \geq 1)$$

$$D_n: \quad 1 - 2 - \cdots - n\text{-}2 \begin{matrix} \nearrow n\text{-}1 \\ \searrow n \end{matrix} \qquad (n \geq 4)$$

$$E_6: \quad \begin{matrix} & & 6 & & \\ & & | & & \\ 1 - & 2 - & 3 - & 4 - & 5 \end{matrix}$$

$$E_7: \quad \begin{matrix} & & 7 & & & \\ & & | & & & \\ 1 - & 2 - & 3 - & 4 - & 5 - & 6 \end{matrix}$$

$$E_8: \quad \begin{matrix} & & 8 & & & & \\ & & | & & & & \\ 1 - & 2 - & 3 - & 4 - & 5 - & 6 - & 7 \end{matrix} \qquad //$$

Para enunciar el otro resultado de Gabriel necesitamos una construcción que se aplica a álgebras de radical cuadrado cero. Si Λ es una k-álgebra de dimensión finita (básica, indescomponible, k algebraicamente cerrado) con radical cuadrado cero, el carcaj separado de Λ, denotado por C'_Λ, se define como sigue:

Si C_Λ es el carcaj ordinario de Λ y $\{1,..,n\}$ son sus vértices, los vértices de C'_Λ son $(C'_\Lambda)_0 := \{1,2,...,n,1',2',...$ $...,n'\}$ y, por cada flecha $\alpha: i \longrightarrow j$ en C_Λ, se pone una flecha $\alpha': i \longrightarrow j'$ en C'_Λ. (Este carcaj C'_Λ no es, en general, conexo).

Teorema: *Sea k un campo algebraicamente cerrado y sea Λ una k-álgebra (indescomponible y básica) de dimensión finita. Supongamos que* $\text{rad}^2\Lambda = 0$ (i.e. $R = F^2$). *Entonces Λ es de tipo finito si y sólo si la gráfica subyacente al carcaj separado C'_Λ de Λ es unión ajena de gráficas como en el teorema precedente.* //

El problema general, para k-álgebras de dimensión finita con k algebraicamente cerrado se reduce, como vimos, a encontrar la lista de los carcajes con relaciones (C,R) tales que hay sólo un número finito de clases de isomorfía de representaciones inescindibles en $\text{mod}(C,R)$. Este problema sigue abierto hasta la fecha; para terminar nuestro apéndice, mencionaremos algunos de los avances que se han logrado en esta dirección.

Recientemente, Ch. Riedtmann anunció que ha obtenido ya la lista de todos los (C,R) autoinyectivos de tipo finito.

También J. Waschbüsch, con técnicas diferentes, ha obtenido resultados similares. Ambos trabajos permanecen aún sin publicarse.

Teniendo en cuenta nuestro ejercicio 6.G, el "caso opuesto" al autoinyectivo es aquel en que $\Lambda = kC/R$ es cociente de hereditaria (i.e. cuando C_Λ no tiene ciclos dirigidos); también es el "caso opuesto" desde el punto de vista de la dimensión homológica: las álgebras autoinyectivas tienen dimensión homológica infinita (a menos que sean semisimples) y las cocientes de hereditarias tienen siempre dimensión homológica finita (ver el ejercicio 5.H.2). Este caso incluye al hereditario que resolvió P. Gabriel, pero no ha sido resuelto mas que en algunos otros casos particulares.

K. Bongartz ha probado recientemente que si (C,R) es de tipo finito y C no tiene ciclos dirigidos entonces, si R no contiene relaciones cero, R debe contener todas las posibles relaciones de conmutatividad. La lista de todos los (C,R) de tipo finito sin ciclos dirigidos y "completamente conmutativos" había sido ya encontrada por M. Loupias en [L]. Esta lista coincide (sobre campos algebraicamente cerrados) con la de las álgebras ℓ-hereditarias de tipo finito que fueron clasificadas, en el contexto más general de las álgebras de Artin, por R. Bautista en 1978.

Si, por el contrario, R tiene un sistema generador de relaciones cero (aunque C tenga ciclos dirigidos), el problema ha sido resuelto aunque de manera menos concluyente: Si C es un árbol, K. Bongartz y C.M. Ringel han encontrado condiciones necesarias y suficientes para que (C,R) sea de tipo finito y, en el caso general (C arbitrario, R generado por relaciones cero) E. Green y P. Gabriel, trabajando independientemente, han reducido el problema (mediente técnicas topológicas) al caso en que C es un árbol. Si hemos dicho "de manera menos concluyente" es porque las condiciones de Bongartz y Ringel (en términos de conjuntos parcialmente ordenados) son, en general, difíciles de verificar y la lista de los árboles de tipo finito, desconocida aún, es mucho muy grande. Esto es, en parte, la razón de que actualmente no se busca ya tanto obtener listas de álgebras de tipo finito, sino obtener algoritmos que decidan, en los casos concretos, si un álgebra es de tipo finito o no.

BIBLIOGRAFIA

[A] M. Auslander. "Representation Theory of Artin Algebras II". Comm. Algebra 1, (1974), 269-310.

[A-F] F.W. Anderson y K.R. Fuller. "Rings and Categories of Modules". Graduate Texts in Mathematics 13, (1973), Springer Verlag.

[B-R] K. Bongartz y C.M. Ringel. "Representation-finite tree-algebras". Por aparecer en Proceedings of the Third International Conference on Representations of Algebras, Puebla 1980. Springer Verlag, Lecture Notes in Mathematics.

[C-R] Ch.W. Curtis e I. Reiner. "Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras". Interscience Publishers, New York, (1962).

[Gb] P. Gabriel. "Unzerlegbare Darstellungen I". Manuscripta Math. 6, (1972), 71-103.

[Gn] F.R. Gantmacher. "Matrix Theory", Vol. II. Chelsea Publ. Co. New York, (1959).

[Gs] W.H. Gustafson. "The History of Algebras and their Re presentations". Por aparecer en los mismos Proceedings que [B-R].

[Hm] G. Hamel. "Eine Basis aller Zahlen und die ...". Mathematische Annalen 60, (1905), 459-462.

[Hr] M. Harada. "Hereditary Semiprimary Rings and Generalized Triangular Matrix Rings". Nagoya Math.J. 27, (1966), 463-484.

[J1] J.P. Jans. "Rings and Homology". Holt, Rinehart & Winston. New York. (1964).

[J-N] J.P. Jans y T. Nakayama. "Algebras with finite-dimensional residue-algebras". Nagoya Math. J. 11, (1957), 67-76.

[K] G. Köthe. "Verallgemeinerte Abelsche Gruppen ..." Math. Zeitschr. 39, (1934), 31-44.

[L] M. Loupias. "Indecomposable Representations of Finite Ordered Sets". Representations of Algebras. Springer Verlag, Lecture Notes in Mathematics 488, (1975), 201-209.

[M] A.I. Máltsev. "Fundamentos de Algebra Lineal". 2a. Edición. Mir, Moscú. (1976).

[N] T. Nakayama. "On Frobeniusean Algebras I,II". Ann. of Math. 40, (1939), 611-633 y 42, (1941), 1-21.
"Note on Uniserial and Generalized Uniserial Rings". Proc. Imp. Acad. Japan. 16, (1940), 285-289.

[Rn] C.M. Ringel. "Report on the Brauer-Thrall Conjetures". Representations of Algebras I. Springer Verlag, Lecture Notes in Mathematics 831, (1980), 104-136.

[Rt] A.V. Roiter. "Unbounded dimensionality of the indecomposable representations...". Math. USSR. Izvestija, Vol. 2, (1968), No. 6, 1223-1230.

Métodos Diagramáticos en Teoría de Representantes, editado por la Dirección General de Publicaciones, se terminó de imprimir en los Talleres de Impresos Olea, S. A. el 30 de Octubre de 1982. La edición consta de 1000 ejemplares.